

Process skills in Mathematics Education and Bowland Maths.

日本にお招きいただき、このような講演の機会をいただいたことに感謝申し上げます。この一週間、多くの先生方にお目にかかり、また日本の授業を見て、多くのインスピレーションを受けました。今日は、数学教育におけるプロセススキルについてと、**Bowland Maths.**について、特に、数学的モデル化を参照しながらお話をしていきたいと思います。

4 つのことに焦点をあてます。はじめに、イギリスの数学教育の背景を簡単にお話します。イギリスの状況は、アメリカと全く同じではありませんが似た状況にあります。**Bowland Maths.**が発表されてから、私はヨーロッパとアメリカで二つの大きなプロジェクトに関わっています。また、いくつかの国で、**Bowland Maths.**に関するフォローアップを行いました。国によって焦点の当て方は異なっていたのですが、ここでは、ビルゲイツ財団の支援のもと、私が **Bowland Maths.**の教師教育教材を使おうとしているアメリカのプロジェクトについて少しお話します。

2 つ目は、数学教育の価値についてです。それは国によって異なるので、学習のさまざまな側面の、何を重視しているかを見ていくことは大変興味深いことです。

3 つ目は、授業で扱う問題のタイプについてです。それは異なる形での学びが必要であることも意味します。ここでは、問題解決と数学的モデル化に焦点をあてます。

そして最後に、授業で **Bowland Maths.**の

教材を用いるにあたっての、教師教育についてお話します。

私はノッティンガム大学教育学部で、学習指導の改善をめざした研究に関わってきました。そこでは、現状を分析するだけではなく、変化に結びつくことをしたいと思ってきました。私たちがある学校で調査を行っただけでは、その学校や先生方は何も変わりません。私たちは革新的で創造的でなければならないと思っています。つまり、先生方のために新しいプロセスやプロダクトや経験をデザインし、自分たちの実践について分析したときにどのような変化が起こるかを研究する必要がありますと考えています。

イギリスにおける数学教育

それでは、イギリスの状況についてみていきたいと思います。いきなり、こんな漫画を出して申し訳ないのですが、これがイギリスの多くの学校の状況です。早く数学の内容を覚えさせたり、試験に合格させたりしようとして、子どもに数学の内容を詰め込んでいます。



何よりも、カリキュラムが本当に沢山の目標に細分化されています。教師は、これらの目標を一つ一つ教えていこうとしています。

例えば、2桁の小数のかけ算や、一元方程式を解く、二元方程式を解くといった具合です。試験もまた、数学の知識を総動員することではなく、決まった手順をうまく実行できるかということに焦点があてられがちです。したがって、とられる指導法は、たいてい教師による情報の伝達です。つまり、授業は、説明、例、練習問題という流れで、それがイギリスではとてもよく見られるパターンとなっています。

Values implied by current practice

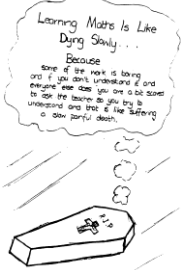
- **Curriculum is fragmented**
 - disparate skills arranged into 'levels'
- **Examinations test fluency in routine procedures**
 - predictable, little reasoning or process skills
- **Teaching is usually by 'transmission'**
 - XXX teaching: explanation, example, exercise
- **Learning is mostly imitative**
 - textbook based
 - individual written work given priority

この結果、ここ数年で、多くの生徒が数学嫌いになってしまいました。TIMSSの結果によれば、数学に対して肯定的な態度をもっている生徒の割合は1995年から2007年にかけて 27 ポイントも落ちました。なぜこのような話をしているかというと、Bowland Mathsの主な目的の一つとして、生徒が数学に対してもっと夢中になって取り組むようにしたいということがあるからです。つまり、生徒が学校を離れたときに、もう二度とそんなことしたくないと思うのではなく、「数学する」ことができることが大事だからです。Ofstedの報告書も、多くの子ども、特に中等教育段階の生徒は、ほとんどの授業がスキルの習得、ルーチンな問題の解決、テストや試験の準備に集中していて、バラエティーがなく面白くないと言っていると指摘しています。また、どの授業でも、教科書にある問いに答

えるだけで、非常に退屈だとも書かれています。スライドの右側にあるのは、数学についてどう思っているかを書きなさいと言ったところ、ある生徒が描いた絵です。数学を学ぶことはゆっくりと死んでいくようなものだと言われています。

Maths has become boring...

- "Many pupils, especially in secondary schools, described a lack of variety, which they found dull. Typically, their lessons concentrated on the acquisition of skills, solution of routine exercises and preparation for tests and examinations."
- "Every lesson, you have to answer questions from the textbook. It gets boring."
- (Mathematics: Understanding the score, Ofsted, 2008)



また、この報告書では、政府がよく言っていることとは逆に、イギリスの基準（スタンダード）が理にかなっているとは言っていない。近年のテストのための教育は、資格（qualification）を得るための準備には功を奏すが、子どもを将来のために数学的な力を身につけさせることにはなっていないと述べています。

こういったうんざりするような話はもうやめますが、2008年に発表された、3,000人の中学生を対象にした代数や割合、小数に関する調査結果によれば、この30年間、ほとんど変化は見られないとされています。

数学教育の目標

では、どのような種類の学びに価値をおくべきなのでしょうか。私は次の3つを考えています。

私たちはみな、手続き的流暢さに価値をおいているでしょう。それは、考えることなしに、数学的手続きを正確に、流暢に、早くで

Goals of Mathematics Teaching

- **Procedural Fluency**
—carrying out procedures accurately and fluently
- **Mathematical Understanding**
—the ability to justify why a particular mathematical statement is true or where a mathematical rule comes from.
- **Mathematical Processes / Practices**
—The ability to make strategic decisions when solving problems, to reason, to prove and communicate results

私たちはまた、数学的理解にも価値をおいています。これは、手続き的流暢さを支えるものであり、また、数学的な主張を正当化する際の助けともなります。生徒はなぜその手続きでよいのかを知る必要もあります。

いまここで3つに分けてお話したのは、これらが異なる種類の指導を必要とするからです。イギリスでは、手続き的流暢さを、たくさんの例を何回も練習することによって教えています。例えば、ピアノを弾くときに、指の動きについて一生懸命考えたくはないでしょう。曲を解釈したり、音楽について考えたいでしょう。それは数学でも同じで、数学の手続きをするときに、その手続きについてはあまり一生懸命考えたくないですね。数学の問題について考えたいですね。

例えば、かけ算や図形について実に多くの概念的理解を共有していますね。それは、授業に、多くの数学的理解があったからだと思っています。

Too many "procedural" textbook presentations

一方、アメリカでは、オバマ大統領がある演説¹⁾の中で、政府と州の教育長に対し、子どもが選択式の問題に答えられるかどうかで安易に測れるような基準と評価ではなく、21 世紀に必要なスキルを示す基準と評価を要求しました。それに応じて開発されたのが、全州共通教育課程 (Common Core State Standards ; CCSS) です。

I'm calling on our nation's governors and state education chiefs to develop standards and assessments that don't simply measure whether students can fill in a bubble on a test, but whether they possess 21st Century skills like **problem solving** and **critical thinking** and **entrepreneurship** and **creativity**.



*Remarks to the Hispanic Chamber of Commerce on a complete and competitive American Education
March 10 2009.*

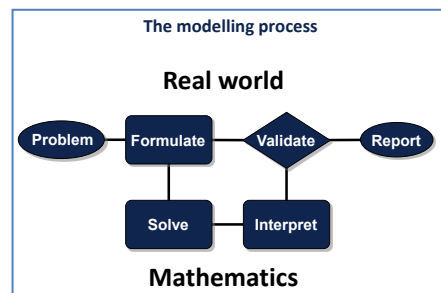
Mathematical Practices (US)

- Make sense of complex problems and persevere in solving them.
- Reason abstractly and quantitatively
- Construct viable arguments and critique the reasoning of others.
- Model with mathematics.
- Use appropriate tools strategically.
- Attend to precision
- Look for and make use of structure
- Look for and express regularity in repeated reasoning.

– (Source: Common Core State Standards for Mathematics)

こちらに示したものは、数学の CCSS に示された「数学的実践」で、プロセススキルに関するものです。複雑な問題を捉え、粘り強く取り組むこと。抽象的、量的に推論すること。批判に耐えうる議論をしたり、他者の推論を批判したりすること。数学的モデルをつくること。適切な道具を戦略的に使うこと。正確さに絶えず注意すること。構造を見出し用いること。推論の連鎖において規則性を見出し表現すること。先ほどの教科書とは全く違ったものですね。

数学的モデル化に少し焦点をあてましょう。スライドの図は、モデル化のプロセスを表しています。みなさんも現実世界の問題を解決しなければならないことがあると思いますが、学校で教えられていない、もっとも難しい部分が、この最初の、現実の問題場面を数学の言語で定式化することなのです。



このモデル化のサイクルは、先ほどアリス先生が述べた「キーププロセス」と表現は異なりますが、こちらのスライドにお示しするように、全く同じものです。イギリスのキーププロセスとアメリカのモデル化は、同じ目標をもっているということがおわかりいただけると思います。

Key Processes (UK) / Modeling (US)

- **Represent / Formulate**
Identify the maths in situations, and select methods, representations and tools to use
- **Analyse / Solve**
Analyse and reason while working on problems
- **Interpret and evaluate / Interpret and validate**
Interpreting findings and strategies and constructing arguments
- **Communicate and reflect / Report**
Share findings and thinking effectively.

プロセススキルと問題のタイプ

英国で最も優秀な生徒であっても、教わった数学を使うことができないということを明らかにした研究があります。イギリスで 1980 年代に、最も優秀な層の 18 歳の生徒 120 人を集めて、現実世界の問題を解かせました。そして、どのような数学的な手法を用いるかを観察しました。これが使用した問題の一例です。自転車通学にするか、バス通学にするかを比べるもので、さまざまな方法で解決できます。解答を集めてみたところ、数量や表を使おうとした生徒が多く、代数を使おうとした生徒はほとんどいませんでした。

Even the best students don't use the maths they know

- 120 top students were given real problems to solve outside the classroom.
- None chose to use algebra.
- (Treilibs, 1980)



Bike or Bus?

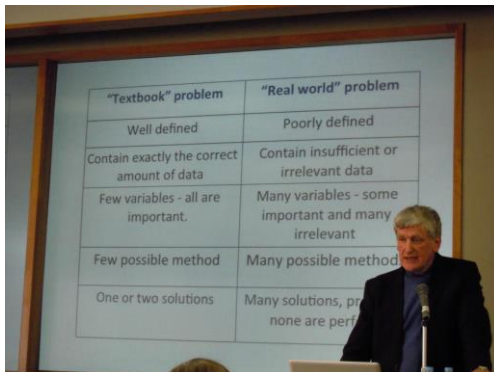
Terry is soon to go to secondary school. The bus trip to school costs 50p and Terry's parents are considering the alternative of buying a bicycle.

Help Terry's parents decide what to do by carefully working out the relative merits of the two alternatives.

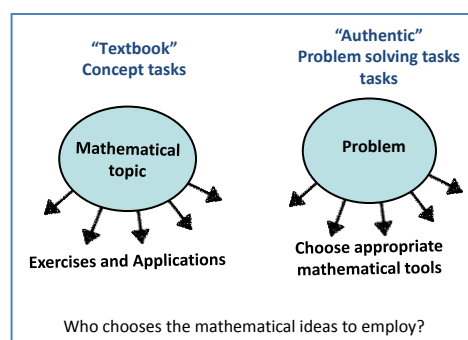
このことにより、私たちは、ここ数年にわたり、生徒がそういった判断をできるようにするには、数学の授業でどうしたらよいかについて、本当に考えさせられました。ほとんどの場合、教科書の章の中で、その流れに従えばよく、しかも、見出しがどうすればよいかを語っているからです。そのこと、例えば代数という章で、生徒が代数を使うとわかっていることに問題があるとすると、私たちが関心があるのは、何らかの問題をただ与えたときに生徒はそれを解決するための道具を選ぶことができるかということです。

そこで、生徒に解決できるようになってほしい問題のタイプについて考えてみましょう。まず考えるべきことは、現実世界の問題とはどのようなものかということです。教科書の問題は必要十分になっていて、正しく、十分なデータがあり、また、含まれている変数は2, 3しかないので、使うものを確認する程度で済みます。考えられる方法も少なく、そして、たいていは解も少ないのです。それとは対照的に、現実世界の問題は、必要十分ではなく、問題にすらなっていないこともあります。自分で問題を作らなければなりません。そして、たいてい、不十分で関係性のないデータや非常に多くの変数を含むので、その中から選ぶ必要もあります。子どもが使うことのできる方法も多く、そして、多くの解があります。その解も、明らかに正しいというものはなく、おそら

く他のものよりはよいという類のものなのです。



"Textbook" problem	"Real world" problem
Well defined	Poorly defined
Contain exactly the correct amount of data	Contain insufficient or irrelevant data
Few variables - all are important.	Many variables - some important and many irrelevant
Few possible method	Many possible method
One or two solutions	Many solutions, or none are perfect



この2つの図については、今週日本に来てからも大変活発に議論してきました。ビルゲイツ財団の仕事でまとめているものを書き直したものです。concept tasks と problem solving tasks があります。左が concept tasks で、たいてい、代数や図形といった数学のトピックから始まるものです。また、現実世界の問題であっても、その数学のトピックの練習や応用という位置づけとなります。一方、右は、それとは異なるタイプの問題です。これは「問題」から始める方法です。教師は、子どもにどうやってやるかは知らせません。生徒は自分が適切だと思う数学の道具を選びます。こういったタイプの問題は、日本の授業では扱われていますか。例を挙げましょう。日本には何人の教師がいるかという問題です。もしかしたらその数をご存知の方がいるかもしれませんが、「もし全く情報がなかったら」というのが質問です。インターネットを見る

こともせず、また他のデータもないとしましょう。みなさんがたどり着くベストアンサーは何でしょうか。どのように推論するのでしょうか。Bowland Mathsの教師教育モジュールでもこういった問題を扱います。今日はちょっとお見せできないのですが、その中によりビデオがあります。生徒は、例えばイギリスの学校にいるのは5歳から18歳の13歳分で、人口は1600万人で、およそ80歳までいるとして、・・・というように推論し始め、よい見積もりを得ていきます。もうひとつ例を挙げましょう。バスが曲がるときに、どれくらい内側に切り込むかという問題です。これは、イギリスでは大きな問題で、実際、多くの自転車の死亡事故が起きています。自転車は、バスと並走するので、角を曲がるときに、バスのタイヤが引っかかるのです。



この問題を解決する際に有効だと思われるプロセスにそって話を進めます。問題を定式化しましょう。はじめに、いくつかの単純化のための仮定をおく必要があります。これは実生活での問題を解決するときに通常行うことです。どのような仮定をおくべきでしょうか。そうですね。典型的なのは、車輪が円弧を描くとするということです。そうすると、バスの車体についても考えたいですね。そこで、単純化することから始めます。私たちが考えることができない、前輪と後輪の間の長さのような重要な変数を書き出し、選びます。曲がり角の半径や、後輪が角を切る込

む量も重要ですね。このように重要な変数を書き出すことは、他の身近な問題の解決においても大切です。

Formulate the problem

- **Make simplifying assumptions**
 - suppose each wheel turns in a circular arc.
 - just consider the how the *wheels* cut the corner.
- **List and select important variables**
 - distance between rear and front wheels (w);
 - radius of bend (r);
 - amount the rear wheel cuts the corner (x)
- **List and select important relationships**
 - If I increase w , what is the effect on x ?
 - If I increase r , what is the effect on x ?
 - can we sketch graphs?

次に、それらの変数間の関係を考えます。バスの全長を長くしたり短くしたりすると、角の切り込む量は増えるか、減るか。あるいは、角の半径を大きくすると、切り込む量は増えるか、減るかといった点です。

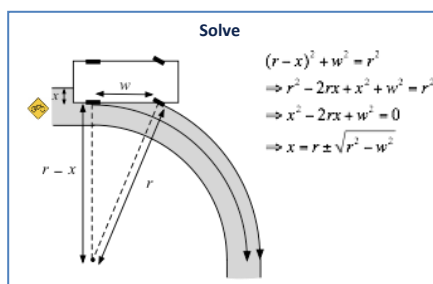
図をかき始めるかもしれませんね。そうすると、この問題の表現として役立つものを選ぶ必要がでてきます。実際に自転車を持ってきて、角をどのくらい切り込むかを調べてみるのも一つの手ですし、レゴで小さなモデルを作ることや、図形に表すことも一つの手です。こうして、最終的に解くべき問題ができあがります。いま私が申し上げた、ここに達するまでのすべてが、本当の意味での教室でのツールとなることなのです。

Formulate the problem

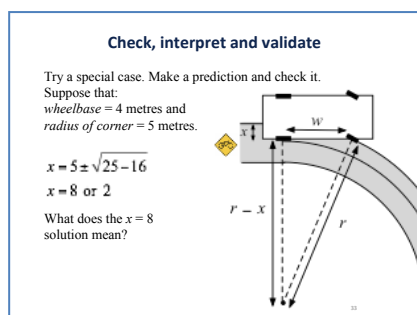
- **Choose helpful representations**
 - (e.g. physical model, diagrams, graphs,)

r = radius of cycle lane
 w = wheelbase of bus
 x = distance bus cuts into the cycle lane

この問題では、このように式に表すことができ、二次方程式を解けば解が得られます。ここはとても簡単な部分ですね。



次に、得た解を検証する必要があります。値を決めて特別な場合について確かめてみましょう。そのときも、二次方程式なので2つの解が得られるはずです。そのどちらを選ぶのかや、なぜ2つの解の意味を考えなければならないのかについて考えます。



これらが、私が考えるモデル化過程におけるプロセススキルです。

次に私たちが使っている問題のタイプについてお話ししましょう。いくつかのタイプをスライドに挙げました。どのタイプの問題にも、生徒が積極的に関わっていくのは実に興味深いことです。

What types of problems? What student roles?

- **Plan and organise**
 - Find an optimum solution subject to constraints.
- **Design and make**
 - Design an artefact or procedure and test it
- **Model and explain**
 - Invent, explain models, make reasoned estimates
- **Explore and discover**
 - Find relationships, make predictions
- **Interpret and translate**
 - Deduce information, translate representations
- **Evaluate and improve**
 - Review and improve an argument, a plan, an artefact

「計画」の問題は、「交通事故を減らそう」

2)のような最適な解を見出すものです。生徒は地方自治体の政策立案者の立場で、その地域の事故を減らすことを考えます。安全対策と費用の一覧をもとに、与えられた予算をうまく使うことによって、どのくらい多くの命が守れるかを考え、もっともよい案をレポートにまとめます。そうすることで、解決の計画や組織化する機会を与えるのです。

生徒に、「デザイナー」という立場で考えさせる問題もあります。スライドの問題は、数年前に行ったプロジェクトからのものですが、例えば、ゲームを作るとか、旅行の予定を立てるとか、消費者としての選択をするとか、紙の製品をつくるとかということです。

Numeracy through problem solving

- The teaching, learning and assessment of numeracy through solving real problems:
 - Design a Board Game
 - Geometry, probability
 - Plan a Trip
 - Money, time, distance
 - Be a Shrewd Chooser
 - Money, data handling,
 - Be a Paper Engineer
 - 3D geometry, algebra
 - Produce a Quiz Show
 - Scheduling, fairness

このプロジェクトで、数日間にわたって、私たちが観察した、生徒のプロセスの様子をお話します。詳細については割愛させていただきますが、生徒は「紙技術者」としてオリジナルのギフトボックスをデザインし、実際に製作します。

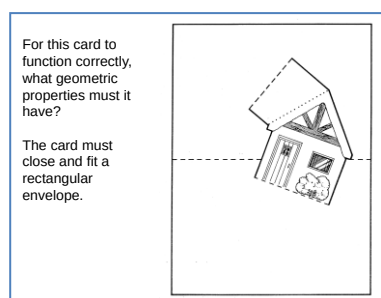
最初に、教室にたくさんの作品例を持って行き、見せます。そして、よい特徴はどんなことで、悪い特徴はどんなことかを決めます。何か始めるときに、実際にあるものを見たり批判したりするのは良い考えですからね。

次の段階として、デザインの理念を決め、数学的により深く観察させます。そして、それをするための計画を立て、実行していくわけです。

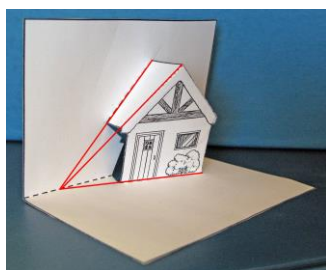
実践したほとんどの学校で生徒は箱を作り上げ、いくつかの学校では、友だちの誕生日にあげたり、販売したりする活動が見られました。



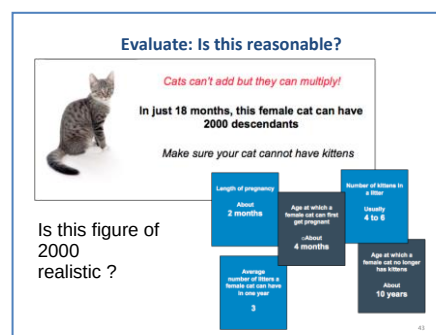
写真にあるのは、どこに数学が使われているのかを調べるとおもしろいカードの例です。機能的に問題のないカード、つまり、しわにならずにたためて、大きさの違う長方形の封筒におさまるためには、どんな図形の性質をもっていなければならないのか、そういったところに数学的な考えが反映されています。



デザインするときには、平面上に描かなければなりませんし、折り線同士のなす角についても考えなければなりません。これを実際に折ったときの角度について調べてみると大変興味深いことがわかります。



また別のタイプの問題です。生徒に、書かれていることが本当かどうかを評価させるタイプの問題です。



これは Bowland Maths. で使われている問題で、実際に動物病院の壁に貼ってあったポスターです。「猫は足し算はできないがかけ算はできる！」とあり、18 カ月たつと、一匹のメスの猫は 2000 匹の孫をもつ可能性があるのです、お宅の猫が子猫を産むことができないかを確かめておきましょうと書かれています。この 2000 匹というのは本当なのでしょうか。この問題を使った授業のビデオが Bowland Maths. の教師教育モジュールに入っていますが、それは実は今回一緒に来日したドミニク先生の授業です。そちらを見ていただくと、ドミニク先生が授業でどうやってこの問題を扱っていったかがわかりいただけると思います。

さて、この問題は私にとっても大変難しいものでして、この問題を数学の先生と学生に考えさせてみたことがあります。はじめに、示された問題を定式化し、グラフやスプレッドシートに表しますが、このことは本当に難しいことなのです。私たちは、その難しさを過小評価してはいけません。どんな仮定をおくとよいかや、オスの子猫についてはどう考えていくかについて話し合います。問題が必要十分ではないので、こういった状況についてのたくさんの仮定をおくことになります。しかし、それにより数学にたどり着き、指数関数を考えていくことになります。

また別の例です。スライドにあるのはBMI値を求める計算機です。インターネット上にも似たようなものがあると思います。ここに値を入れていくわけです。身長 3m, 体重 80kg というように、好きな値を入れることができます。

Explore and discover: How does BMI work?

Body Mass Index (BMI) Calculator
Enter values for height and weight.

Height: metres

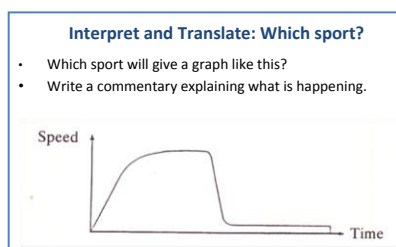
Weight: kilograms

BMI:

This person is in the category (for adults)

ここでの数学的課題は、この裏にある数学はどうなっているかを考えることです。生徒は、はじめに、ここに値を入れてデータを集めます。そうすると、自ずと、変数を制御することについて考え始めるでしょう。そして、グラフをかいたり、二次関数であることに気づき始めたりして、代数へと進んでいきます。これが、何かを自分で探究し、どういう仕組みになっているかを発見しようとする、「探究と発見」の課題です。そして、それがわかったら、ある人が健康かどうかを判断するための理にかなった方法を考えることが問題となります。この計算機によると、イギリスのアスリートのほとんどが不健康だと結果になるのですが・・・。

次の例は、「解釈と翻訳」の課題のひとつです。スライドのグラフを提示して、「横軸を時間とする、このようなグラフになるスポーツは何でしょうか」と問います。



すると、学年の低い子どもでも推論をし始め、いくつもの案にたどり着きます。グラフが上がって下がっているので、スポーツも上がって下がるものにちがいないと考える子どもが多いです。例えば、「モータボートや馬のジャンプだ」とか、「パラシュート競技で、その理由は、飛行機で上がり、パラシュートで降りて、その後少し移動するからです。」などと言います。

これらは、教科書にはあまりないタイプの課題だということがおわかりいただけたのではないのでしょうか。

教師教育について

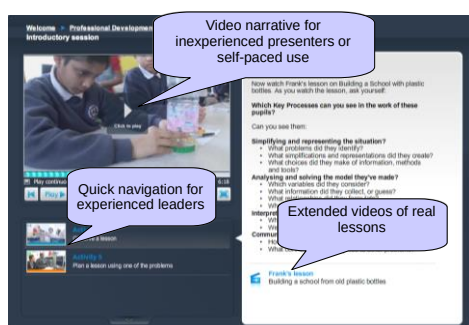
そこで、このような問題を授業でどう扱ったらよいのかという、先生方にとっての問題に話を進めましょう。Bowland Maths.には、5つの教師教育モジュールがあります。それぞれに主題があります。また、そのそれぞれが3つのセッションで構成されています。

Professional development support

- 5 modules cover the main pedagogical challenges:
- Each is in three parts:
 - Introductory session:**
Teachers work on problems, discuss pedagogical challenges they present, watch video of other teachers using these problems and plan lessons.
 - Into the classroom:**
Teacher teach the planned lessons.
 - Follow-up session:**
Teachers describe and reflect on what happened, discuss video extracts, and plan strategies for future lessons.

導入のセッションでは、まず先生方がその数学の問題に取り組みます。次に、それを授業で扱ったときにはどのようなことが起こるかについて話し合います。そして、その問題を扱った授業のビデオで見て、その上で、指導案をいっしょに作成します。次のセッションでは、先生方は、その計画した授業を行います。ただし、イギリスでは、多くの場合、

授業を観察し合うようなことはありません。最後に、フォローアップのセッションで、先生方が再び集まり、授業で起こったことについて報告し合います。また、同じように話し合っている教師たちの様子をおさめたビデオも見て議論します。そして将来の授業に向けての方略を考えます。



このソフトウェアは、Bowland が立案し、ノッティンガム大学が設計したもので、イギリスでは、インターネットで無償で手に入れることができます。ビデオにはナレーションがついていますし、拡大縮小もできます。また、ナビゲーション機能もありますし、実際の授業全体を収めたビデオもあります。私たちは、現在、これを先生方がどのような目的で利用しているのかを調査しています。一人で見ているのか、校内の数名の先生と一緒に見ているのか、あるいは大学の先生によって、何らかのコースの一部として使われているのか、というのも重要な観点です。

アリス先生も Bowland Maths.の教師教育モジュールの内容についてお話ししましたが、少し補足したいと思います。最初に触れたいのは、この中のどこに数学があるのか、ということです。Bowland Maths.のケーススタディを見た先生からも生徒からもよく投げかけられる質問です。現実世界の問題を扱ったケーススタディを提示すると、生徒は数学か

ら始めるのではなく、問題から始めることになるからです。

1. Where is the Maths in this?

- The mathematics is not evident to students
- The mathematics doesn't seem difficult enough.
- How and when do we develop the necessary maths technique for real life problem solving?
 - Before? During? After?

次によくあるのは、そこで用いる数学はいつもあまり難しくないではないか、という指摘です。実は難しくないということには重要な意味があるのです。このような問題に向かうと、昨日学習した数学は使わずに、2～3年前に学習した数学を使う傾向があることがわかっているからです。教師教育の最初のモジュールは「ケーススタディのどこに数学があるか」という副題が付いています。そして、その最初に、ホンジュラスでペットボトルを使って学校を作るという活動の一連の写真を生徒に見せていく授業が紹介されます。先生は数学について何も話さずに、このような写真を見せていきます。

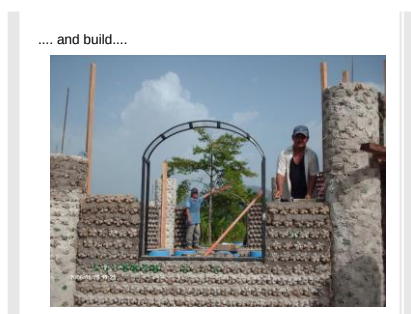
First we collect old plastic bottles



.... and build....



まず、使用済みのペットボトルを集めました。次にその中に砂を詰めました。そして、岩で建物の基礎を作り、周りの壁も作りました。その間をワイヤーでしっかりと固定していきます。漆喰もつけたりします。このような一連の写真を 11 歳の生徒に見せた後、その先生は「興味深かったことを全て書きましょう」と投げかけました。さらに、「疑問や質問を挙げましょう」と言い、それらの反応を黒板に書いていきました。そして、「ここに挙げた疑問や質問の中に、数学で答えが出るものはありますか」と投げかけに対して、生徒からは、それは科学の質問だ、数学の質問だ、これは答えが出ないのではないかと、といった声があがります。そういったことについて話し合った後で、「数学的に答えが出せる疑問や質問を一つ選んでごらん下さい」と言います。教室のうしろにはボトルや道具があり、必要であればそれらを使いながら、40 分間、その質問に対する答えを考えます。いつも生徒が挙げる質問は、この学校を作るのに何本のボトルが必要か、ということです。学校を建てるにはどれだけ飲まなければならないか、ということもあります。それから、建物の角のこのような塔は、どのようにしてつくるのかという疑問も出てきます。他にもたくさんの疑問や質問が出されます。



そして、生徒は測り始めたり、問題を単純化し

「この教室を作るためには何本のボトルが必要かを考えてみよう」と言い出したりします。

教師教育モジュールでは、先生方が、この授業について議論をし、また実際に、授業もしてみるようになっています。

時間がなくなってきましたので、ポイントを絞ってお話をします。二つ目のモジュールは、「構造化されていない問題への取り組み」というタイトルです。私たちはよく先生方に、教科書の典型的な問題を取り上げて、本来であれば生徒が行うべき、どのような判断がなされているかと尋ねます。

この問題を見てください。18 個のお菓子を入れる箱を作るという問題です。どんな箱にするのか、お菓子はどのように並べるのかといったことが既に示されています。

Revise a structured design problem

- Designing a box for 18 sweets
- You work for a design company and have been asked to design a box that will hold 18 mints. Each mint is 2 cm in diameter and 1 cm thick. The box must be made from a single sheet of A4 card with as little cutting as possible. On the grid paper below, show clearly how the card can be folded up and glued together to make the box. Make your box to check.

**What decisions have been made for the students?
Revise the task so that some of these decisions are handed back to students.**

そこで、先生方に、これを構造化されていない問題に作り替えてもらいます。例えば、箱の絵や並べ方は示さずに、箱を二種類、デザインしましょう、どちらがよいですか、なぜそう考えましたか、と問うことになります。

An unstructured version

- Designing a box for 18 sweets
- You work for a design company and have been asked to design a box that will hold 18 sweets.
- Each sweet is 2 cm in diameter and 1 cm thick.
- The box must be made from a single sheet of A4 card with as little cutting as possible.
- Compare two possible designs for the box and say which is best and why.
- Make your box.

次に先生にとって気がかりなのは、教室で

のグループによる協働作業をどう進めるかということです。教師教育の三番目のモジュールがこれに関するものです。

スライドでお示しているのは、生徒たちに生産的な話し合いをさせるための基本ルールの例です。いくつかは、ケンブリッジ大学の New Math の研究から取ってきたものです。

Ground rules for students

- Talk one at a time
- Share ideas and listen to each other
- Make sure people listen to you
- Follow on
- Challenge
- Respect each other's opinions
- Enjoy mistakes
- Share responsibility
- Try to agree in the end

What is the teacher's role in small group work?

- Make the purpose of the task clear
- Keep reinforcing the 'ground rules'
- Listen before intervening
- Join in, don't judge
- Ask learners to describe, explain and interpret
- Do not do the thinking for learners.
- Don't be afraid of leaving discussions unresolved.

もう一つは、先生の教師の役割に関するものです。Bowland の問題を扱ったときに、いつ手助けすべきか、いつ手助けしないべきかがわからないと言う先生方が少なくないからです。例えば、介入する前にその話し合いを聞く、ということがあります。また、話し合いに加わっても、判断はしないようにする、ということもあります。それはいい考えだね、それはよくない考えだよ、と言ってしまうことは、ある一つの方向に誘導してしまうことになるからです。

また、授業の最後になると、先生の役割も変わりますね。生徒たちは自分たちが見出したことを発表します。先生はその「大きな考え」を捉え、位置付けや価値付けをしたり、一般化したりします。そして、生徒が、学んだことについて振り返ったり、その考えを他の考えと結びつけたりでき

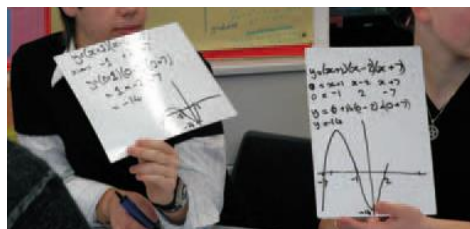
るように支援します。

Purposes of whole class discussion

- Learners presenting and report on what they have found.
- The teacher recognises 'big ideas' and gives them status and value.
- The learning is generalised and linked to other ideas.

形成的評価について

最後に形成的評価について、少しお話しておくことにします。教師教育モジュールの後半部分にも、これについてのモジュールがあり、教師がどのように生徒のニーズに対応していくかということを考えていきますが、それは割愛させていただきます。代わりに、アメリカのビルゲイツ財団のプロジェクトでも使っているモデルでお話します。授業を行う前に問題を提示し、20 分で自力解決させます。先生は、それを持ち帰り評価します。評価と言っても、点数やグレードをつけたりはしません。そういったことは逆効果だという研究結果があるからです。その代わりに、生徒がより深く考えることにつながるような質問を書きます。そして、授業のはじめに、生徒に、フィードバックを与えたり、その質問に対するコメントの機会を与えたりします。そのコメントは小さなホワイトボードに書かせます。先生も生徒同士もそれらを見ることができるからです。



次に、生徒はペアを組み、各々の解決よりも、よい解決を見いだそうとします。

いくつかのペアの考えをクラス全体で共有します。先生が相異なる考えを選ぶことで、生徒

はどれくらいの可能性があるのかを知りたくなります。この時点では、代数を使うことにしたという生徒は滅多にいません。そこで、先生が解決の例を挙げますが、その例は正しいものでも、あるいは完成したものでもありません。生徒の考えが書かれたものです。こういった例を見せられると、生徒は他のアプローチをしてみようという気になり、再び、他の方法で問題を考え始めます。こうすることで、生徒は、その問題を3通りの方法で考えたことになります。皆さんに資料としてお渡ししたブーメランの問題は、このプロセスの例です。

Boomerangs

- Phil and Cath make and sell boomerangs for a school event.
- They plan to make them in two sizes: small and large.
- Phil will carve them from wood.

• The small boomerang takes 2 hours to carve and the large one takes 3 hours. Phil has a total of 24 hours available for carving.

• Cath will decorate them.
She only has time to decorate 10 boomerangs of either size.

- The small boomerang will make \$8 for charity.
- The large boomerang will make \$10 for charity.
- They want to make as much money as they can.

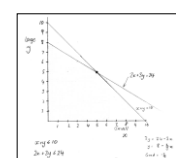


- How many small and large boomerangs should they make?
- How much money will they then make?

Whole class discussion: comparing different approaches

Phil can only make 12 small or 8 large boomerangs in 24 hours
12 small makes \$96
8 large makes \$80

Cath only has time to make 10, so \$96 is impossible.
She could make 10 small boomerangs which will make \$80.
Or she could make 8 large or 10 small boomerangs and make \$80



Small	Large	Profit
0	0	0
1	7	78
2	6	76
3	5	74
4	4	72
5	3	70
6	2	68

The most Profit is \$96

Small boomerangs = x
Large boomerangs = y

Time to carve $2x + 3y = 24$ ①
Only 10 can be decorated $x + y = 10$ ②

① - ② $y = 4$ $x = 6$

So make 6 large boomerangs
6 small boomerangs

ここに4つのアプローチの例があります。言葉で書いたもの、表、グラフそして代数を使ったものがありますが、どれも正しいものではないです。これらを授業で取り上げることは、最初の方で引用したオバマ大統領の要求につながるわけです。大統領は、子どもが、批判的にみて改良していくことができるようになってほしいと考えてい

るからです。

永遠に続けていまいそうなので、このあたりで私の話は終わりにしたいと思います。

【質疑】(抜粋)

Q: 教師の授業観を根本から変えていくことも視野に入れた大きな取り組みで、すごく感銘を受けました。Bowland Maths.には18の教材があるということでした。日本でもモデル化教材を考えるとときには、どこの学年のどの生徒というものを想定して、どういう武器を持っているからきつとこういうプロセスを辿るだろうということを考えます。そして、そういう想定のもとに、こういう力をつけて欲しいといった目標があると思います。Bowland Maths.の18の教材は、何を対象に、誰を対象にしているのでしょうか。

マルコム先生: Bowland Maths.のケーススタディは中学生、キーステージ3が対象となっています。この教材は、面白くて、現実社会に即した問題になっていて、数学があまり表面に出ていなくて、しかしきちんと問題解決力を養うものという条件で、世界的に公募をかけました。イギリスだけでなく、アメリカやオーストラリアの様々な機関、中には現場の先生から出されたものもあります。現実的には中学生だけでなく、小学校の高学年で使っているところもあります。

Q: イギリスでは、Bowland Maths.を使っている教員はどのくらいいるのですか。

マルコム先生: 2010年に調査した時点では、およそ60%の学校が使っていました。その後は調査できていません。ただ、その調査後に、生徒のプロセススキルを測るための「評価課題」というものを出しました。ケーススタディは

4 時間程度の扱いで、結構長いのですが、「評価課題」は1時間で扱えます。それが 35 個ありまして、インターネットのアクセス数を見る限りにおいてはかなり使われています。

藤井先生:必要な数学は before か during か after かという話がありましたが、あれについての先生のお考えをお聞かせください。たぶん、日本の先生方は応用問題として提示している。最初の質問もそうだったんですけど、数学の内容との関係に関心を持たれると思いますので。

マルコム先生:私たちはスキルを動機づけるために、必要なスキルを与える前に、大きな問題を提示し、考えさせます。例えば、先ほどのブーメランの問題、あれは線形計画の問題ですが、線形計画の学習前に扱うと、年齢やクラスによってまちまちの考え方ができます。いろいろなアプローチが考えられる問題だからです。興味深いのは、グラフや表などの方法を洗練していくことで、授業の最後には線形計画の考えにたどり着くことがよくあるということです。一方、線形計画について説明してからそれをやれば「練習」ということになります。子どもは、「私は線形計画を使います。いま、それを教わったのだから！」と答えるだけでしよう。

藤井先生:もうひとつ。プロセスを教育の目標に据えるということでしたが、そのプロセス自体はコンテンツフリーですね。すなわち、数学の内容に関係なくプロセスだけを取り出して教えることができるかということについて、どうお考えになりますか。

マルコム先生:コンテンツフリーで、プロセスを教えることはできないと考えています。あとから解決過程を振り返らせることで、どこで、どの

ようなプロセスを使ったかを意識化させることはできます。先生がおっしゃるように、今日は定式化についての授業です、定式化の練習をしようということではできないです。

アリス先生:私も文脈のある問題の中でプロセスを教えるということに関して、マルコム先生の考えに賛成です。その際、先生が生徒に、プロセスに関心があるのだということをはっきりと伝えることでも、何を学んでいるかということに関する生徒の理解が深まると思います。

藤井先生:今日の話は、教師に指導の目標がプロセスにあるということを理解させるための取り組みだと理解しました。通常、それは内容に向かっていきますから。同時に、生徒にも、学習の目標がプロセスにあるということを信じさせないとうまくいかないということですね。

マルコム先生:そうです。子どもに理解させなければなりません。

藤井先生:クリティカルで、難しいところですね。プロセスに焦点をあてるので、まず、指導者が教授の目標をプロセスに切り替えなければなりません。私たちは、内容、例えば 2 次関数を教えよう、因数分解を教えようという気持ちが強いけれど、プロセスを始動の目標に据える、つまり教師の信念を変えなければいけない。同時に生徒も、内容の理解だけではなく、プロセスも学習の目標として大事なのだという意識変革をさせないとうまくいかない。プロセスも大事だというメッセージをだして、学習態度を変えていかないとよくいかないということです。

ドミニク先生:仰る通りで、最初にやはり先生を変えなくてははいけません。いままで内容だけを教えていたのだけれど、プロセスも教えるのだということを実感しなければなりません。

そして、生徒にも、それがどういうことなのか、ニュアンスやイメージとして、生徒にわかる形で示していくことが大事です。

私は、この9月に転勤しました。新しい学校の生徒たちは、まったく Bowland 的な数学をやったことのない生徒たちでした。最初に、マルコム先生の話にも出てきた、イギリスには何人の教師がいるだろうという問題をだしてみました。「君たちがどのくらい数学的にコミュニケーションできるかどうかを知りたいので考えてみてね」とふんわりと投げかけてみました。そうしたら、案の定、どこから、どう始めたらいいのかわからないと。次に似たタイプの異なる問題を投げかけたときには少しは取り組めるようになっていました。それで、4、5カ月の間教えてきているわけですが、この間にもかなりの変化が見られます。どんな問題を投げかけても、どうやって始めるかというところがわかって、取り組めるようになってきました。それから、概念型の数学への取り組みもよくなりました。要するに、自信を持って数学の問題に立ち向かえるようになってきたのです。さらに、生徒のモチベーションもよくなり、問題に対して、すぐに取り掛かりたいという姿勢が出てきています。複雑な問題に対しても、いろいろと質問をして何とかしようとしてきます。普通の数学の概念を教える授業で、今までだったら、これは何のために学ぶのだらうと疑問に思ったままの生徒が多かったのですが、現実の文脈の問題をやったことで、これはどこかで使えるものだから先生が教えてくれているだろうと、生徒が考えてくれるようになりました。先生に対する信頼感というのでしょうか。意味もないことを教わっているのだという認識がなくなったのです。これはかなり大きな変化です。

マルコム先生:教師教育モジュールの中にもありますが、生徒にプロセススキルを学ぶことがどういうことかを理解させること的手段として、生徒に他の生徒の解決を評価させるということがあります。うまく定式化できているか、論の筋道がわかるかなどを評価することで、自分がすべきことを理解し始めます。つまり、生徒同士の相互評価は、とてもよい「内面化」の方法なのです。

記録者注

1)オバマ大統領の演説は以下にある。

http://www.whitehouse.gov/the_press_office/Remarks-of-the-President-to-the-United-States-Hispanic-Chamber-of-Commerce (2011年5月5日現在)

2)『交通事故を減らそう』は、付属のソフトウェアを用いて過去の交通事故の傾向を分析し、限られた予算内で効果的な安全対策案を考えるケーススタディである。このソフトウェアの日本語版は、ボーランドジャパンで、無料で公開されている。

<http://www.bowlandjapan.org/>

付記

アリス先生、マルコム先生の講演は、国際算数数学授業研究プロジェクト・第3回 国際セミナーとして、2012年2月18日、東京学芸大学S401教室で行われたものである。講演は英語でなされており、本講演記録の文責は西村にある。なお、両先生らの招聘は、科学研究費補助金基盤研究(B)(研究代表者:西村圭一、課題番号22300273、平成22-24年度)によるものである。

記録:成田慎之介、勝亦菜穂子、西村圭一

文責:西村圭一