

6.11 「ポカリウスを分配しよう」と「走り幅跳びの代表選手を選ぼう」

筑波大学附属坂戸高等学校 小澤 真尚
文部科学省 長尾 篤志

概 要

第4章に示した数学的判断力に関する調査で用いた問題を一部修正し、高校生に対して授業を行った。生徒は学習感想において、本授業で学んだこととして、着眼点や考え方が人によって異なること、問題の解決には他者の考え方にも耳を傾けること、柔軟に考えることなどを挙げ、他者の意見を参考にし、数学的な根拠を挙げて考えることが自分自身の考えを決定づける重要な方法であることを理解したことがわかった。

6.11.1 教材について

問題1

とおるさんの学校は、スポーツ飲料「ポカリウス」の粉末を600袋もらいました。これを夏休みに活動するクラブに分けることにしました。夏休みに活動するクラブの人数と活動日数は、下の表の通りです。



クラブ名	人数	活動日数	クラブ名	人数	活動日数
バスケットボール	20	14	バドミントン	15	8
サッカー	50	12	合唱	25	24
テニス	30	18	理科	10	24

あなたなら、それぞれのクラブに何袋ずつ分けますか。理由も説明してください。

問題2

学校対抗の陸上大会があります。担当のみゆき先生は、「走り幅跳び」の選手1名を誰にするか悩んでいます。

「走り幅跳び」は、1人が3回跳び、その中で最も遠くまで跳んだ人が優勝となります。昨年までの2年間の優勝記録は、次の通りです。

年	2010年	2011年
優勝記録	403cm	385cm



みゆき先生は選手を選ぶために、下の表の昨日と今日の記録を見えています。×の印は、ファール（記録なし）を示しています。

あなたなら、「かずお」、「やすゆき」、「たかし」のうちの誰を選手にしますか。理由も説明してください。

「走り幅跳び」の記録

昨日	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
かずお	355cm	345cm	385cm	360cm	370cm
やすゆき	×	375cm	353cm	390cm	365cm
たかし	400cm	×	315cm	402cm	×

今日	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
かずお	×	369cm	372cm	375cm	386cm
やすゆき	376cm	×	357cm	386cm	374cm
たかし	×	×	×	320cm	405cm

問題 1, 2 とも, 第 4 章で述べた数学的判断力に関する実態調査で用いた問題 (名前のみ変更) である。問題の詳細については, 第 4 章を参照されたい。

6.11.2 数学的判断力に関する枠組みとの関連

問題 1

A : プロセス能力

A-1 : 定式化

A-5 : 数学的コミュニケーション

A-6 : 数学的・社会的価値認識

B : 数学の内容

B-1 : 代数的

C : 選択支援

C-2 : 指標・指数

C-3 : 評価式

D : 社会的価値観

D-1 : 公平性・公正性・平等性

D-3 : 責任性・自律性

問題 2

A : プロセス能力

A-1 : 定式化

A-3 : 数学的推論・分析

A-4 : 解釈・評価

A-5 : 数学的コミュニケーション

A-6 : 数学的・社会的価値認識

B : 数学の内容

B-1 : 代数的

C : 選択支援	B-4 : 統計的
C-3 : 評価式	C-2 : 指標・指数
D : 社会的価値観	C-4 : 確率・統計的推測
D-3 : 責任性・自律性	D-4 : 持続性・恒常性・一般性
D-5 : 効率性・有限性	

6.11.3 授業の実際

日 時：平成 24 年 12 月 17 日（月）第 1 校時（問題 1），第 2 校時（問題 2）

授 業 者：筑波大学附属坂戸高等学校 小澤 真尚 教諭

対象生徒：筑波大学附属坂戸高等学校 第三学年 22 名

数学に対する興味・関心はあり，取り組む姿勢にも積極性は見られるが，「数学 I」しか履修していない生徒もいるため，履修歴にはバラつきがある。また，履修科目の少ない生徒の中には数学に苦手意識を持っている生徒もいる。また，プロセス能力に関しては，おおむね，水準 1（自己限定的）または水準 2（多様性の萌芽）にあると考えられる。これらが水準 3（社会的）に上がることを目標とする。他者との相互作用においても，より高い水準（ $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$ ）を目標とする。

第 1 時の授業展開の概要：

[50 分授業]

0～5 分 **導入**：本時で扱う問題は答えは一つではなく，それぞれの経験を生かしてそれぞれに考えてほしいということを伝えた。問題 1 を提示し，個別に考えても，友だちと相談してもよいことにした。

5～35 分 **解決**：ほとんどの生徒が 2～3 人で考えた。途中，「一袋にはどのくらい粉が入っているのか」という質問があった。これは，自分たちで仮説を立てるようにと回答した。

35～45 分 **発表**：指名し，各部へ何袋ずつ割り当てたかと考え方を発表させた。

S1 (人数)×(活動日)の値を求め，それが全体の合計の何%になるかを考える。

「みんな同じ額の生徒会費を払っているのです，不公平のないようになるべく均等に。」

Handwritten notes in Japanese:

- 人数 × 日
- 全体を足す 2380
- 各部署が全体の何%か
- 60%を%で分ける
- 12おまたので 4つの郵便封じにする
- 運動部に多いという意見もあると思うが
- みんな同じ年費を払っているのに
- お金の差をつけるとは不公平
- 運動部の方だけエクストラを自選していたらいい
- これは学生の分かいで各クラス，同じおいくら
- 各クラスおいくら

バスケットボール	69 袋	バドミントン	33 袋
サッカー	153 袋	合唱	150 袋
テニス	135 袋	理科	60 袋

S2 活動日を 1/4 にして人数をかけると 595 個が配れて、残りは活動日の少ないバドミントン部以外にあげる。

バスケット	64	→	70
サッカー	160		150
テニス	126	→	135
バド	33		30
合唱	155		150
理科	62		60

活動日を 4分の1 にして (64+160+126) 人数をかけて 570

あまりは全部の人数で分けて、1人分 0.23 × 770 人数

→ 応均等にしたら

のこり 50 をバド以外にあげてあげよう

バスケットボール	71 袋	バドミントン	33 袋
サッカー	151 袋	合唱	151 袋
テニス	136 袋	理科	61 袋

S3 600 を全体の人数で割って、一人あたりの袋数を求め、(人数) × (一人あたりの袋数) を求めた上で、現実場面に即して解釈し直して調節をする。

$20 \times 4 = 80$ $15 \times 4 = 60$ $600 \div 100 = 6$
 $50 \times 4 = 200$ $25 \times 4 = 100$
 $30 \times 4 = 120$ $40 \times 4 = 160$

限定① 理科 30 袋 (あまり)

② バド 50 袋 (あまり)

③ サッカー 170 袋 (あまり)

④ テニス 130 袋 (あまり)

⑤ テニス合唱をそれぞれ 10 袋増やす (合計 20 袋増やす)

↓

バスケット	110 袋	バドミントン	50 袋
サッカー	170 袋	合唱	110 袋
テニス	130 袋	理科	30 袋

運動部には多くあげたいから、サッカー部は少ないので、バスケットとテニスとバド、合唱部は人数と日数が多いので、多めにあげる。

バスケットボール	110 袋	バドミントン	50 袋
サッカー	170 袋	合唱	110 袋
テニス	130 袋	理科	30 袋

「理科部には 40 袋もいらぬし、中で活動するとか外で活動するとかは置いておいて、運動部にはたくさんあげたいので、・・・サッカー部とテニス部はよく動くので、・・・サッカー部を 200 にするとさすがに多すぎるのでは・・・と考えて、バランスをとっていった。」

第2時の授業展開の概要：

[50分授業]

0～5分 導入：前時の問題と見た目は異なるが、同様に考えとその理由を書いてもらう問題であることを伝え、問題2を提示した。大会では3回跳べることを確認した。

5～25分 解決：ほとんどの生徒が2～3人で考えた。平均を求めた後、ファウルに着目し、選手の精神面を想像し、どの選手にするとよいかを考えた生徒が多かった。最終的に、どの選手にするかを決める段階で、かなり悩んでいた。

S5 「優勝記録を超えている回数が最も多いから。」

「特に、唯一400を超えているから。」

私なら、T:カレ を選手に選びます。
(理由)

唯一400cm以上の記録を出すことが
出来たカレに期待して選んだから。

ファウル数 かずお 1回
やすお 2回
T:カレ 5回

成功率 かずお 90%
やすお 80%
T:カレ 50%

S6 「昨日と今日のそれぞれ上位3つの記録の平均を求めた。」

私なら、やすお を選手に選びます。
(理由)

昨日、今日 5回中上位3つの記録を平均すれば
やすおが1番記録が高いから
ファウルもT:カレに比べては少ない。

S7 「4回目、5回目は差が大きいのので集中して跳んでいない。だから、1～3回目のみに注目した。それで、1～3回目の(最長と最短)記録の差を点数化して、その差が小さい『かずお』にするとよいと考えた。」

『かずお』はファウルが1回しかなく、記録が最終的に上がっている。本番でも、冷静に跳べる。(野球部での実体験を述べ)スポーツでは練習で普通の人が本番でも安定する。」

「走り幅跳び」の記録

昨日	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
かずお	355cm	345cm	385cm	360cm	370cm
やすゆき	X	375cm	353cm	390cm	365cm
たかし	400cm	X	315cm	402cm	X

今日	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
かずお	X	369cm	372cm	375cm	386cm
やすゆき	376cm	X	357cm	386cm	374cm
たかし	X	X	X	320cm	405cm

私なら、かずお を選手に選びます。
(理由)

① 1回目 → 2回目 → 3回目の全ての記録の差を出して、
全て点数にする。(ファウルは入れない)

② 3回目までの記録もくわえて考える。

③ 4回目からは大会のルール回数まで入っているので、
おぼろ、評価の対象としない。

50点

かずお: 1~3 - 30点, 4~5 - 10点 やすゆき: 1~3 - 4点, 4~5 - 25点 たかし: 1~3 - 85点, 4~5 - 25点	40. 400: 1~3 - 25, 4~5 - 15 400: 1~3 - 15, 4~5 - 10 400: 1~3 - 全ファウル, 4~5 - 85点
---	--

→「でも、優勝させたいんだから、優勝記録を超えた『たかし』の方がいいでしょ。」

S8 「大会が3回跳べるから、1~3, 2~4, 3~5回の平均を出し、それを合計してさらに平均を出して考えた。」「ファウルは0とした。」

「走り幅跳び」の記録

昨日	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	70点	3~5回
かずお	355cm	345cm	385cm	360cm	370cm	363cm	371.7cm
やすゆき	X	375cm	353cm	390cm	365cm	284.6cm	367.3cm
たかし	400cm	X	315cm	402cm	X	223.4cm	249.2cm

今日	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	70点	3~5回
かずお	X	369cm	372cm	375cm	386cm	300.5cm	372.9cm
やすゆき	376cm	X	357cm	386cm	374cm	272.1cm	362.3cm
たかし	X	X	X	320cm	405cm	145.2cm	241.9cm

私なら、やすゆき を選手に選びます。
(理由)

① 1~3回, ② 2~4回, ③ 3~5回の平均を出す。
④ ①②③の平均を37.7cmとたして、一番やすゆきの記録が伸びた。

35~50 分 まとめ：プリントを配布し、次のまとめ1・2を書かせた。

分 **【まとめ1】** 問題1, 問題2の解決を通して、あなたはどのようなことを学びましたか。また、どのような考え方が今後も使えると思いましたか。

【まとめ2】 問題1, 問題2に挑戦した感想を書いてください。

その後、身の回りにこのような状況はないかを考えさせ、身近で何かを決めるときに理由(根拠)にもとづいていることを実感させた。

6.11.4 授業の考察

ここでは、第2時の最後に記述させた、「まとめ1」「まとめ2」について分析する。

(1)「学んだこと」

22名の生徒の記述のうち「学んだこと」を整理しなおしたものが次の表である。

	「学んだこと」	人 数
1	同じ結論でも導く過程が多様だ	2
2	人それぞれ、いろいろな考え方がある（のは面白い）。人間性が現れる	7
3	自分の経験によって考え方が変わる	1
4	答えが一つではない問題に自分なりの答えを出す	1
5	考え方で答えが変わるのでいろいろ試してみることが大切だ	4
6	他の人の意見を聞いて考えを進めていくのはこれからも生かせる。	6
7	人の考えは参考になる。今後、活用できそうなものがたくさんあった。一人では分らなくても考えていくことが大切だ	6
8	百分率を用いるのはいいことだ。人を説得しやすい	2
9	平均の考えを用いて考えることが多い。平均などを用いると人を説得できる	3
10	数学的な考え方や計算は日常生活で使える。計算で出た答えは自分の考えを裏付ける	2
11	問題2で、3回ずつに分けて考えることは自分にはない発想だ	3
12	問題の背景を考えてどのような方法をとるかを考えることが大切	1
13	数値的な記録だけでなく、その他の情報も考慮する	2
13	問題文に書かれていないことを勝手に想像して利用しようとするのはよくない	1

学んだことは大きく次の4つに分けられる。

- ① 答えが一つに定まらない問題では、人はいろいろな考え方をする。どのような考え方をするかで結果は変わってくるが、考え方に影響を与えるものとして生活経験などがある。
- ② 問題の背景を考えてどのような方法をとるかを考えることが大切だ。方法は柔軟に変えていくことも必要だ。
- ③ 人の意見は参考になる。一人では分らなくても考えを進め、人の意見も適宜参考にすればよい。
- ④ 百分率や平均など、数学の考えを用いると人を説得することができる。

実際的な問題を解決しようとするとき様々な条件を考えなければならないが、本質的なものは何かを見いだすことがカギになる。例えば、問題2で「実際の試合では3回連続して競技を行うのだから3回連続した記録を考える方がよい」、とか「実際の試合では3回しか競技ができないのだから、1回目や2回目でファウルになり4回目や5回目でよい記録を出す選手は実力が発揮できないはずだ」という発想はこの問題の本質を突いているとも

言える。いろいろ意見を出す中でそのことを感じ取った生徒は少なくない。また、人を説得する際に数学を用いることが有益だ、ということも生徒は感じ取っている。数学が問題解決に際し、不要な恣意を排し、そのルールに従えばだれもが同じ結論に達し、自他を納得させるに有効であるということを感じ取らせるのに今回の授業は成功していると言えよう。

(2)「感想」

22名の生徒の記述のうち「感想」を整理しなおしたものが次の表である。

	「感 想」	人 数
1	答えが一つに決まらないということで新鮮さを感じた。最後まで面白く考えることができた	4
2	「そういう見方もあるのか」という発見もあり、ためになる授業だった	2
3	適当に解決することもできたが、よく考えると「これだ」と決めることができ面白かった	4
4	答えが一つに決まらず数学的でなかった	1
5	自分なりの答えを出すのに難しさを感じた	2
6	問題に書かれていないことを指摘されたり、他の人の意見に納得させられたりした	1
7	いろいろな考えを自力・協力して考え、学ぶことができ楽しかった。今後、実際に問題のような場面があればよい	1
8	答えが一つに決まらない問題で、他の人の意見を取り入れたりすり合わせたりして納得した答えが得られるのだろうと思った	2
9	周りの人を納得させるような説明ができるとうれしかった	1
10	自分の考えをもっと押せるとよかった	1
11	他の人の意見をたくさん聞いて、結局自分もたくさん考えることができた。	3
12	他の人の意見を聞いて驚くこともあったが、これから数学を学ぶ上で参考になる	3
13	数学的なことも、自分の生活に置き換えて考えると分かりやすくなる 普段扱う数学の問題は、いろいろな条件が付いているが、自分で条件を考えなければならない問題は難しいと感じた。指標が多すぎても少なすぎてもうまく解決できない	3
14	決められた式に当てはめるのではなく、自分の理論を作り使うことができるので考え甲斐があった	1
15	解決するとスッキリするが、解決できないとモヤモヤする。もう一度考えたい	1

感想は大きく次の5つに分けられるだろう。

- ① 答えが一つに決まらなかったののでいろいろ考えられ面白かった。／答えが一つに決まらなかったのので難しかった。
- ② 条件などを自分で考えることができたので深く考えることができた／条件などを自分で考えなければいけなかったのので難しかった。
- ③ 他の人の意見が大変ためになった。／他の人の意見を基に深く考えることができた。
- ④ 自分の考えを説明して他の人を納得させることができた。／自分の考えをきちんと説明できなかった。
- ⑤ 数学を学ぶ上で大いに参考になった。

生徒の印象は、全体的にかなりよい。「難しかった」という生徒も、難しいから嫌だというのではなく、むしろ難しいことを喜んでいると感じる。いくつかの理由はあるだろうが、自分で自由に考えを進められることや、みんなで問題を解決すること（数学をつくりあげること）が大きな理由ではないか。今後、問題解決型の授業を進めることや、一人一人の生徒の考えを生かすこと、その中で納得しながら他の生徒の意見を取り入れよりよい考えへと発展させることを通常の数学の授業でも考えていくことが大切ではないか。

6.11.5 成果と課題

対象の生徒は自由選択科目「数学基礎」の受講者で、日頃の授業から考えることに重点を置かせてきた。その影響もあったのか、授業者の想定よりも話し合い、じっくりと取り組んでいた。しかし、今回のような他者と結論が異なったり、あるいは結論が同じでもその根拠が大きく異なったりする課題は、この科目で（おそらく数学の他の科目でも）扱ってはこなかったため、生徒には戸惑いもあったように感じた。

前述の生徒の感想や学んだことから、他者の意見を参考にし、数学的な根拠を挙げて考えることが自分自身の考えを決定づける重要な方法であることを今回の題材から生徒たちは理解していると判断できる。生徒の反応からも、自分の考えをまとめ、他者に伝える活動のために今回の題材は効果的であったと考えられる。

今後の課題としては、今回のような生徒同士で複数の結論が存在するような問題解決型の良質な課題を、生徒の実態に合わせてどのように選択・準備していくか、また、これらの課題を通して授業者が生徒のどのような行動や発言を取り上げ、評価していくかが挙げられる。実際に授業を行い、問題の選択や評価の難しさを感じた。