平成 22 年度～平成 24 年度
科学研究費補助金基盤研究(B）
課題番号 22300273

社会的文脈における
数学的判断力の育成に関する総合的研究

平成 25 年（2013 年）3 月

研究代表者　西村　圭一（東京学芸大学）

はしがき

私たちは，平成 22 年 4 月から 3 年間にわたり，日本学術振興会科学研究費補助金・基盤研究(B) のもと,『社会的文脈における数学的判断力に関する総合的研究』を行ってまいりました。

社会の情報化やグルーバル化がますます進む中で，個人としての豊かな生き方を追究する上で，またその総体としての豊かで持続可能な社会を形成する上で，文脈にそって数学を選択し，的確な解釈や判断を行う能力が不可欠となっています。他方，わが国の算数・数学科の教科書や授業に目を向けると，現実世界の文脈を取り入れた問題の扱いが増えつつありますが,その文脈で展開される数学的活動はあくまで当該単元の学習を志向するものであって,そのような能力の育成に資するような授業が行われていないのではないでしょうか。このような問題意識のもとで取り組み始めたのが本研究です。

そして，この 3 年間，私たちは，このような能力の育成に資する「授業づくり」を中心に据え,議論を重ねてきました。授業が変わらなければ子どもは変わらないと考えたからです。そして，そこから何が必要かを辿り，数学的判断力の枠組みや，子どもの実態調査，数学的判断力の育成のための授業の枠組みの作成等に取り組みました。また，私たちが考える授業を実践する教師には，算数・数学の「内容」を前面に置く，日本の従来の算数・数学の「授業文化」とは異なる，新たな「授業文化」を受け入れることが不可欠だということも分かってきました。それは，唯一の「正解」があるわけではない問題に，仲間と協力しながら挑む，その「プロセス」が前面に出る授業です。

私たちが研究を始めて 1 年が立とうとするとき，東日本大震災がありました。昨年訪れた宮城県のある高等学校の校長先生がこんな話をしてくださいました。

「いま，生徒たちは，科学不信に陥っています。大丈夫と言われていた堤防も役立たなかった，安全と言われていた原発もあのような状態になってしまった。だから，科学など信じられないと。考えてみると，私たちは数学の授業でも，これが正しい，だからこうしなさいと，そればかりやってきた。そのような授業そのものを見直すべきときだと思っています。」

従来の数学教育観や授業文化に新たな風を吹き込むべきときだという思いをあらたにしました。

お忙しい中，本研究にご協力いただきました研究メンバーをはじめ，調査や実験授業にご協力いただきました先生方並びに児童・生徒に心より御礼申し上げます。また，Quentin Thompson さん，畠中倖さん，Alice Onion 先生，Malcolm Swan 先生をはじめ，イギリスの Bowland Maths.関係者の皆様には，私たちの訪問調査でお世話になったばかりか，来日もしていただき，私たちの研究に多大なる示唆をいただきました。この場を借りて，心より感謝申し上げます。

平成 25 年 3 月

研究代表者　西　村　圭　一

研究メンバー一覧

（所属は，2013 年 3 月現在）

西村　圭一	東京学芸大学（研究代表者）
青山　和裕	愛知教育大学教育学部
江崎　智彦	横浜市立仲尾台中学校
久保　良宏	北海道教育大学教育学部（旭川校）
櫻井　順矢	山梨大学教育人間科学部附属中学校
柴田　奈緒子	荒川区立汐入東小学校
島田　　功	成城学園初等学校
清水　宏幸	山梨県教育庁義務教育課
清野　辰彦	山梨大学教育人間科学部
関　亜希子	昭島立拝島中学校
長崎　栄三	静岡大学大学院教育学研究科
長尾　篤志	文部科学省初等中等教育局
浜田　兼造	さいたま市立大宮東中学校
本田　千春	東京学芸大学附属国際中等教育学校
松嵜　昭雄	埼玉大学教育学部
松田　菜穂子	東京学芸大学国際算数数学授業研究プロジェクト
室谷　将勝	荒川区立汐入東小学校
山口　武志	鹿児島大学教育学部

研究成果物一覧

論文

1. 浜田兼造（2010），「数学的モデル化のサイクルを実現する授業に関する研究－「ガソリンの割引カード」を例にして－」，日本数学教育学会誌数学教育第 92 巻第 9 号，pp.11－18
2. 西村圭一・山口武志・清水宏幸・本田千春（2011），「数学教育におけるプロセス能力育成のための教材と評価に関する研究－イギリス「ボーランド数学（Bowland Maths.）」の考察－」，日本数学教育学会誌『数学教育』，93-9，pp.2-12，2011
3. 西村圭一・山口武志・久保良宏（2011），「数学的判断力の育成に関する研究 —その意義と授業の枠組みとについて—」，日本数学教育学会『第 44 回数学教育論文発表会論文集』，pp.237-242
4. 西村圭一・本田千春・山口武志・久保良宏・青山和裕・松嵜昭雄（2012），「数学的判断力の育成に関する研究—プロセス能力の水準化とその実際—」，日本数学教育学会『第 45 回数学教育論文発表会論文集』，pp.329-334
5. 清水宏幸・清野辰彦・長尾篤志・西村圭一（2012），「数学的判断力の育成に関する研究—実態調査の考察—」，日本数学教育学会『第 45 回数学教育論文発表会論文集』，pp.335-340

口頭発表等

1. 西村圭一（2011），「イギリス Bowland Maths.の教師教育モジュール －教師としての自己向上機能の育成をめざして－」，日本教材学会『第 23 回研究発表大会研究発表論文集』，pp.72-73
2. 西村圭一（2011），「数学的判断力を育成する科学技術教育」，『第 4 回横幹連合コンファレンス論文集』（CD-ROM），2B1-1
3. 西村圭一（2011），「海外（英国）に見る問題解決教育」，第 2 回科学技術教育フォーラム
4. 西村圭一・本田千春（2012），「プロセス能力の育成を目指す授業とその評価－英国 Bowland Maths.を参考にして－」，統計数理研究所『統計教育実践研究』Vol.4，pp.58-61
5. 浜田兼造（2012），「日常生活と数学をつなげる力の育成をめざして－「修学旅行のルートを決定しよう」を題材として－」，日本数学教育学会『第 94 回総会特集号』，p.364
6. 本田千春（2012），「活用する力を育成する指導と評価－オープンな問題の実践を通して」日本数学教育学会『第 94 回総会特集号』，p.368
7. 山口武志（2012），「「数学的活動」に基づく数学科授業構成」，日本数学教育学会「第 94 回全国算数・数学教育研究（福岡）大会　講習会」（2012 年８月５日，会場：北九州市・AIM ビル）.

その他

雑誌等

1. 西村圭一（2011），「外国調査の結果　イングランド」，『教科書・教材のデジタル化に関する調査研究　教科別報告書＜算数・数学＞』，公益財団法人教科書研究センター，pp.45-50
2. 西村圭一（2012）「データに基づいて判断するプロセスを学ばせる授業づくり」，『新しい算数研究』No.493，東洋館出版，pp.8-11
3. 西村圭一（2012），「算数・数学科における『体験的な活動』」，『中等教育資料』No.919，学事出版，pp.14-19
4. 西村圭一（2012），「海外の中・高校生に追いつけ，追い越せ」，『資料の活用』（日本統計学会編），東京図書，pp.42-43
5. 久保良宏（2011），「バレーボールの勝敗」，『中学校教育フォーラム 2011 秋号』，大日本図書，pp.10-11
6. 久保良宏（2012），「スピーディーサンタ」，『中学校教育フォーラム 2012 冬号』，大日本図書，pp.10-11
7. 久保良宏（2012），「脱文脈的数学教育から文脈依存型の数学教育へ―数学的判断プロセスに関する研究から―」，『平成 23 年度研究集録第 16 号』，旭川市数学教育研究会「数学共育会」，pp.5-14.

報告書

1. 西村圭一・山口武志・清水宏幸・本田千春（2011），『Bowland Maths に関するイングランド実地調査　報告書』，http://www.bowlandjapan.org/

講演録

2012 年 2 月 18 日に，東京学芸大学国際算数数学授業研究プロジェクトとの共催で，Bowland Maths.に携わっている Alice Onion 先生（キングスカレッジロンドン客員），Malcolm Swan 先生（ノッティンガム大学教授）の公開講演会を実施した。下記はその講演記録である。

Alice Onion，*Mathematical processes and their assessment in education in England*
Malcolm Swan，*Process skills in Mathematics Education and Bowland Maths.*

『学芸大数学教育研究』，第 24 号，2012，pp.11-32 に掲載

新聞報道

1. 日本教育新聞 2011 年 3 月 7 日付に，本科研による研究授業が「『正解』なき問題の答えを探して」という見出しで，掲載された。
2. 毎日新聞 2011 年 6 月 28 日付朝刊「理系白書'11」に，本科研による研究授業が「過程重視の授業で数学的思考育てる」という見出しで，掲載された。

Web ページ

web ページを開設し，Bowland Maths. の教材の紹介や，イギリスでの実地調査報告，上記講演録等の本科研の成果の一部を公開した。特に，ICT 教材「交通事故を減らそう」については，Bowland Maths.から日本語化と日本での無償使用の許諾を得て，一般公開している。

http://www.bowlandjapan.org/

もくじ

第６章　数学的判断力を育成する授業

第１章　研究の目的と方法

1.1　研究の目的

数学は，程度の差はあっても，脱文脈化や一般化を志向する。他方，情報化やグローバル化が一層進み,「知識基盤社会」とよばれる現代社会では，こうした学問としての数学の志向性とはむしろ逆に，文脈にそって数学を選択し，的確な解釈や判断を行う能力が重視される傾向にある。実際，こうした傾向は，近年，国内外で実施されている各種の調査にも反映されている。例えば,「OECD/PISA 数学的リテラシー調査」では,「現実世界の問題」を「数学的問題」として定式化し，数学的世界においてそれを解決し，数学的な解答を現実の状況に照らして解釈する「数学化サイクル」とよばれる数学的プロセスが重視され，そこで必要となる能力群も考察されている（国立教育政策研究所，2004，pp.29-39)。わが国でも，2007年度から実施されている「全国学力・学習状況調査」の「Ｂ問題」において，知識や技能，考え方などを活用する能力とともに，自分の考えや問題解決過程を数学的な表現を用いて説明する能力が重視されている。このように，視点の違いはあっても，数学的内容の定着に関する評価にとどまらず，数学的な表現力やコミュニケーション力，活用力などといった能力の評価にも関心が寄せられている。もちろん，こうした関心の背景には，これらの諸能力が，現実世界の問題を解決するプロセスで重要となる数学的能力群である，との認識があると考える。

一方，わが国の算数・数学科の教科書や授業に目を向けると，現実世界の文脈を取り入れた問題の扱いが増えつつあるが，二つの問題点がある。一つは上述のように評価問題が先行しているため，評価問題で正答を得るような力を目標として捉えがちなことである。そのような調査問題にはペーパーベースであることの限界が隠れている。すなわち，評価問題は，目標とされている数学的能力群の一側面を測っているにすぎないと考え，それらの能力の育成を考える必要がある。もう一つは，現実世界の文脈を取り入れた問題の扱いが単元の終盤に位置づけられることが多く，あくまで当該単元の学習を志向している点である。これは，島田茂（1942）が次のように述べているような「数学を現実に使う」活動，すなわち，現実世界の問題を数学的視座から真に考察する活動には至っていないと考える。

「ココデ色々ナ問題トイフモノノ中ニ，各節ノ終リニアル所謂「應用問題」ノ含マレルコトハ勿論デアルガ，ソレハ多クノ場合現實カラ数回抽象サレタ問題デアリ，適用スベキ方法モソノ節ノ方法ヲ適用スレバヨイトイフコトハ既知トミナサザルヲ得ナイカラ，アル一ツノ概念ヲ如何ニapplyスルカトイフ練習ニシカナラナイ．トコロガ數學ヲ現實ニ使ウトイフ場合ニハ，次ノ様ナ性格ガ考ヘラレル．

(1) 如何ナル方法デ解ケルカハ前モツテワカツテヰナイ．自分ノモツテイルアラキル武器ヲ総動員シテカカラネバナラヌ．
(2) 問題ハ常ニ複雑シテヰル．ソレ故，自分ノ目的ニカナフ様ニ適當ニ假定ヲ作ツテ，數學ノ問題ニ化サナケレバナラナイ．
(3) 従ツテ解決ノ方法ハ色々アリ，ソノ結果モアクマデ近似的デアル．
(4) 數學的ナ解決ハ，今一度現實ト自分ノ問題トノ相關ノ中ニオイテ考ヘテミテ初メテ

眞ノ解決ニナル．ココデ初メテ始メニ自分ガ考ヘタ假定ガ現實ニ即シテヰルコトガ検證サレル．即チココノ檢證ハ答ノ驗ノミナラズ，假定ノ驗，方法ノ驗ニナル．コノ様ナ性格ハ，數學ノ中ノ問題デハ中々オコリ得ナイ．コトニ(2)，(4)ハ大切ナモノデアリ，コノ様ナ考ヘ方ガカヘツテ數學的内容ヲヨク理解サセルコトヲ思ヘバ數學ヲ使ヘル様ニスル為ニハ，コノ様ナ現實ニブツカラセルコトガ必要デアラウ．」

こうした背景のもと，本研究では,「数学的判断力」を「数学的判断プロセスをたどりながら，数学的論拠に基づいて，事象を分析，解釈し，意志決定する能力」と規定した上で，数学的判断力の概念の明確化やその枠組みの具体化をし，その育成を意図する教材及び授業を開発しその有効性を実証的に考察するとともに，子どもの数学的判断力の評価やその育成を図るための教師教育のあり方についての示唆を得ることを目的とする。

1.2　研究の方法

上述の研究の目的に対して，次の第一から第六までの方法をとる。

第一に，数学的判断のプロセスを明確化した上で，数学的判断力に関する枠組みを具体化する。それは，数学的判断力を育成するための授業づくりに関する「規範的枠組み」，及び，子どもたちの数学的判断力の実態を分析するための「記述的枠組み」にもなると考える。第二に，その「数学的判断力に関する枠組み」の柱の一つとなる「プロセス能力」に焦点をあてながら,「プロセス能力に関する水準表」を提案する。

そして,「数学的判断力に関する枠組み」や「プロセス能力に関する水準表」を基盤に，次の第三から第六のことを行う。

第三に，現実世界の問題を解決するプロセスで必要となる数学的諸能力の育成を掲げるイギリスの数学教育改良プロジェクト Bowland Maths.の教材,評価,教師教育について考察し，教材，評価，教師教育に関する示唆を得る。第四に，児童生徒の数学的判断力に関する実態調査を行い，結果を分析し，授業実践への示唆を得る。第五に，児童生徒の数学的判断力の育成を意図する教材を開発する。そして，第六に，実験授業を行い，子どもの様相を分析する。

第２章　数学的判断力の枠組みと評価

本章では，本研究の理論的基盤である「数学的判断力に関する枠組み」を提案する。この枠組みは，数学的判断力の育成を目的とする授業づくりのための「規範的枠組み」であるとともに，授業における子どもたちの数学的判断力の分析や，本研究で開発・実施した数学的判断力に関する実態調査の分析の基盤になるという点において，「記述的枠組み」といえるものでもある。加えて，本章では，「数学的判断力に関する枠組み」の重要な柱である「プロセス能力」について，６つのプロセス能力を縦軸とし，「自己限定的」，「多様性の萌芽」，「社会的」の３つの水準を横軸とする「水準表」を提案する。

2.1　「数学的判断力」に関する枠組み

2.1.1　問題の所在と主な先行研究の概観

子どもの主体的学習を支える授業の一つとして，いわゆる「問題解決的な学習」が広く浸透している。「基礎へ帰れ（back to basic)」に対するアンチテーゼとして，1980 年の Agenda に端を発して台頭した今日の広義の問題解決は，与えられた問題の単なる解決にとどまらず，現実世界から数学的世界への翻訳過程である「数学化（mathematization）」を強調した点において，その数学教育的意義は大きい。実際，基礎的な数学的知識や技能を現実世界の文脈に包んで子どもたちに学習させることは，数学的な知識や技能の意味および有用性をわかりやすく理解させる上で有効であったといえる。

一方，多くの「問題解決的な学習」の主目的は，やはり数学的な知識や技能の習得である。抽象化や理想化などを経て，現実世界の問題を数学的世界における問題へと翻訳する「数学化」，とりわけ「水平的数学化」のプロセスに子どもたちを参画させるといっても，それが真の意味での数学的活動に十分なり得ているであろうか。問題解決という文脈をとりながらも，実際には，その文脈で展開される数学的活動は，あくまで「既成の数学」の追発見を強く志向するものであって，現実世界の問題を数学的視座から真に考察する数学的活動を十分に経験させるには至っていない，というのが現実ではなかろうか。また，対象とする事象は，依然，「確定事象・決定論的事象」であり，「不確実性事象」を取り上げていても，解が一意に定まる「数学の問題」となっている場合が大半ではないだろうか。

このような状況に対して，Mukhopadhyay & Greer（2001）は，社会的問題や政治的問題を分析するツールとして，数学を批判的に用いることを強調している。また，Lesh & Zawojewski (2007) は，ポスト問題解決の視座として，「models-and-modeling perspective」を提案している。子どもたちにリアルな問題に取り組ませた上で，導出される様々なモデルを数学的に探求し共有・再利用可能なモデルに高めることを強調している点において，「models-and-modeling perspective」は新たな視座といえる。国内でも，長崎（2001）が，社会における現象や問題に取り組む際に必要な力や感覚を「算数・数学と社会をつなげる力」

として構造化し，子どもの実態調査やその育成に向けた実践を重ねている。さらに，島田（2009）は，これからの社会では，価値観が多様になるため，自ら何らかの価値観に基づいて意志決定をしなければならないことを強調しながら，算数の授業においては，多様な社会的な価値観が顕在化する問題を開発し授業を進める必要性を指摘している。馬場（2009）も，「数学的考え方を用いた社会的判断力の育成を目標とした，数学的・社会的多様な解を有する問題」を「社会的オープンエンドな問題」として定義し，その価値を論じている。

2.1.2 「数学的判断」のプロセス

認知心理学研究では，人間が何らかの判断をすることを「意志決定」としている。また，「意志決定」は，「ある複数の選択肢（alternative）の中から，１つあるいはいくつかの選択肢を選択すること」（竹村，1996，p.81）と定義されている。さらに，小橋（1988）は，意志決定は「選択を正当化する理由づけをさがすこと」(p.40),「なぜある選択肢を選んだのかその理由が自他に対して容易に説明できて,その正しさが弁護できることが人間には重要」（p.49）であるとしている。また，佐伯（1980）も，集団的意志決定という立場から，ある選好の背後にある理由づけや根拠を明らかにすることの重要性を指摘している。これらの指摘をみると，私たちは意志決定の連続の中で行動しているが，熟考を要する場面や集団における意志決定の場面では，選択の根拠が重要であり，その前提として，質の高い「選択肢」の必要性があらためて確認される。

本研究で焦点を当てる「数学を用いて判断をしようとする場面」は，熟考を要する場面や集団における意志決定の場面である。そのプロセスを，上述の認知心理学研究における「意志決定」及び Pollak（2003）の「数学的モデル化過程」の規定を基盤に考えてみよう。

まず，現実世界の問題を「数学の問題」に定式化する。そのために，事象を数量化や幾何学化などをし，数学を適用しやすくするとともに，重要と思われる対象や関係を見いだしたり，基準や仮定をおいたり，必要なデータを収集したりする。次に，その「数学の問題」に対して数学的処理を施し，数学的結果を得る。複数の選択肢を創出するために，この過程を繰り返す。そして，創出した選択肢の中から，根拠を明確にして選択すなわち決定をする。yes-no の二択であったり，はじめから選択肢が示されていたりする場合は，選択のための根拠を，数学を用いて探すことになる。本研究では，このプロセスを「数学的判断プロセス」とよぶことにする。なお，このプロセスは，言うまでもなく，一方向的で，線形的なものではなく，行きつ戻りつしながら進展するものである。

また，「数学的モデル化過程」と「数学的判断プロセス」との違いは，次の点にある。前者では，よりよいモデルを志向して，そのサイクルを繰り返す。それには現実を必要な程度に正確に記述するモデルになっているかのチェックが必要となることが多い。それに対して，後者では，幅広い選択肢を検討することが質の高い判断につながると考え，基準や仮定を変更することで，定式化から数学的結果を得るプロセスを繰り返す。誤解を恐れずに言えば，前者が主として「確定事象」に対する考察の方法であるのに対して，後者は「不確実事象」にも適用できる方法と位置づけられる。

2.1.3　「数学的判断プロセス」の柱

①社会的価値観とプロセス能力

2.1.2 で述べた数学的判断プロセスに関して，飯田・山下他（1994）や飯田（1995）が問題にしている「価値論（value)」をはじめ，Greer（2007）が問題にしている「社会的公平性（social justice)」，島田（2009），馬場（2009）が問題にしている社会的にオープンエンドな問題の解決に見られる「価値観」に関する議論は示唆的である。馬場（2009）が指摘するように，これらの研究の事例の多くは，分割・分配問題を扱っている。

例えば，飯田・山下他（1994）は，次の「メロンの問題」で，子どもたちから得点比に応じて比例配分するという考え以外に，平等性やいたわりの情といった視点から，「各チームに $3\frac{1}{3}$ ずつ平等に分ける」といった考えや，「優勝したＡチームにのみ４個を分けて，Ｂチームと Ｃチームには３個ずつ分ける」といった考えが提案されたことを報告している。そして，分割・分配問題においては，価値や倫理の問題が介在しており，子どもの社会的な価値観が認識できる数学的活動を構成し，人間性と数学性との関連を認識させることを指摘している。ただし，この問題を数学的判断プロセスに照らすと，多様な価値観に基づく分配の方法を理解・鑑賞するまでで，その評価・決定までは射程にいれていないことがわかる。

［メロンの問題］

A,B,Cの３つのチームがゲームをしました。このゲームには 10 個のメロンが賞品になっています。このゲームの結果は次の表のようになりました。あなたならどのように賞品を分けますか。分け方をいろいろ考えてみましょう。

Ａチーム	Ｂチーム	Ｃチーム
45 点	27 点	18 点

一方，Greer（2007）が取り上げている分配の事例は，経営最高責任者（CEO）の給与と一般的な労働者の給与のバランスが公平であるかを考えるものである。この問題では，配分に関する選択肢に内在する価値観と，変数の選択や仮定・仮説の設定との関係，例えば，社会的公平性という観点と，会社への貢献度の指標化の方法やそれと給与との比例関係を仮定することの関係などを一層顕在化（意識化）させ，それぞれの考えを反省的・批判的に検討することが求められる。

上述の「公平性」は，社会的価値観の一つであり，他に，例えば，多様性・協調性（意見の異なる場合や利害の対立する場合などにおいても，その状況に調和を図り，互いに協力して問題を解決する)，責任性（行動するためのプランを作り，実行する）などが考えられる（角屋，2010，p.11)。そして，Greer（2007）の例からは，算数・数学教育で数学的判断プロセスを扱う意義として，このような社会的価値観の認識を容易かつ深化させ，それとの関わりの中で，現実世界の問題を解決するプロセスで必要となる数学的能力群である，いわゆる「プロセス能力」を発揮することを一層期待できる意義が見いだされる。

②数学の理解と活用

数学的判断プロセスは文脈依存的なので，それを算数・数学教育で扱う意義は，子どもに提示する問題や授業を念頭におきながら議論する必要があると考える。そこで，本研究において数学的判断プロセスに関わる問題として開発した「走り幅跳びの問題」をもとに，数学の内容理解や活用という視点での意義について検討してみたい。

［走り幅跳びの問題］

学校対抗の陸上大会があります。担当の村田先生は，「走り幅跳び」の選手１名を誰にするか悩んでいます。「走り幅跳び」は，１人が３回跳び，その中で最も遠くまで跳んだ人が優勝となります。昨年までの２年間の優勝記録は，2009 年が 403cm，2010 年は 385cm でした。村田先生は，選手を選ぶために，下の表の昨日と今日の記録を見ています。×の印は，ファール（記録なし）を示しています。誰を選手にしますか。

「走り幅跳び」の記録

昨日

	１回目	２回目	３回目	４回目	５回目
ひでき	355 cm	345 cm	385 cm	360 cm	370 cm
ようすけ	×	375 cm	353 cm	390 cm	365 cm
わたる	400 cm	×	315 cm	402 cm	×

今日

	１回目	２回目	３回目	４回目	５回目
ひでき	×	369 cm	372 cm	375 cm	386 cm
ようすけ	376 cm	×	357 cm	386 cm	374 cm
わたる	×	×	×	320 cm	405 cm

筆者らの行った調査では，子どもは様々な算数・数学の考えを用いて選択の根拠を考えることがわかった（詳細は第 4 章）。すなわち，島田茂（1942）が，数学を現実に使う際の性格の第一番目に挙げている「如何ナル方法デ解ケルカハ前モツテワカツテヰナイ．自分ノモツテイルアラヰル武器ヲ総動員シテカカラネバナラヌ.」ことが実現される意義が示唆される。

また，選択をする際の根拠の１つに，平均値が提案されることが想像される。その際には，ファウルを記録０cm として回数に含めるかどうかが話題となる。そのことにより，「平均」という数学的な考えの性質がより鮮明に浮かび上がってくると考える。すなわち，ある種の「ノイズ」として暗黙的に排除されてきたことを，あえて取り扱うことによって，数学的な考え方のよさや合理性に光を当てることができるという意義が示唆される[1)]。

さらに，これまで，日本の算数・数学科であまり強調されてこなかった，算数・数学の利用法が顕在化する。それは，場面に応じた指標や指数を作成することである。例えば，ファ

---

1 「メロンの問題」では，「各チームに $3\frac{1}{3}$ ずつ平等に分ける」といった考えや，「優勝したＡチームにのみ４個を分けて，Ｂチームとでチームには３個ずつ分ける」といった考えとの対比を通じて，「比例」という数学的な考えの合理性や一般性，妥当性がより鮮明に浮かび上がっているという点が指摘されている。

ウルを０cm として，記録の合計を 10 で割った値は，ファウルのリスクを加味した「指標」となる。また，「(370cm 以上跳んだ回数) －（ファウルの回数)」も「指標」である。これは，選択肢を比較検討する際の算数・数学の利用と言えよう2)。

これには，他に，学校数学を念頭におくと，次のような利用が考えられる。第一に，選択肢を評価するための式を作成することである。例えば，OECD/PISA 数学的リテラシー調査の「ベストカー」では，５種類の新型車について，安全性，燃料効率，外観，内装の４つの観点の採点結果から,「カーオブザイヤー」を決める際に, 観点別の得点に重み付けをする「評価式」(合計＝（３×S）＋F＋E＋T など）が取り上げられている。第二に，シミュレーションにおける利用である。表計算ソフトの利用や乱数の利用も考えられる。第三に，リスクを評価するための，確率や統計的推測の利用である。選択肢の選択では，その実現可能性も考慮しなければならないことが多い。その議論も数学的に行うことで，質の高い意志決定が期待できる。

2.1.4　「数学的判断力」に関する枠組み

2.1.3 の議論から，数学的判断力に関する枠組みの柱として，「A．プロセス能力」,「B．数学の内容」,「C．選択支援」,「D．社会的価値観」が導出される。A～Dには，それぞれ下位要素が含まれており，それらの詳細は表 2-1 の通りである[3]。

表 2-1　数学的判断力に関する枠組み

A：プロセス能力
- A-1：定式化　　A-2：数学的表現
- A-3：数学的推論・分析　　A-4：解釈・評価
- A-5：数学的コミュニケーション　　A-6：数学的・社会的価値認識

B：数学の内容
- B-1：代数的　　B-2：図形的
- B-3：関数的　　B-4：統計的

C：選択支援
- C-1：シミュレーション　　C-2：指標・指数
- C-3：評価式　　C-4：確率・統計的推測

D：社会的価値観
- D-1：公平性・公正性・平等性　　D-2：多様性・多面性・協調性
- D-3：責任性・自律性　　D-4：持続性・恒常性・一般性
- D-5：効率性・有限性　　D-6：快楽性・愉悦性

[2] 認知心理学では，規範的な「意志決定規則」として研究されている。例えば,「ベストカー」の選択方法は,「効用加算ルール」と呼ばれるものである。また，ビジネスにおける意志決定を取り上げた文献では, 数学を用いた意志決定規則が数多く扱われており, 示唆的である（例えば, 中村，2008)。

[3] C，D については，学校教育の範疇で扱うことが可能なものとして，それぞれ，４つ，６つの項目を挙げた。したがって，数学的判断プロセスにおける選択支援，社会的価値観を網羅したものではない。

「A．プロセス能力」については，問題によって程度に差はあるとしても，数学的判断プロセスで必要となる数学的能力群に光を当てることになる。「A．プロセス能力」に含まれる６つの下位要素は，イギリスのナショナルカリキュラム（National Curriculum，QCA，2007a ; 2007b，以下 NC）における「主要プロセス」や，国定カリキュラムをめぐるイギリスの数学教育の動向（西村・山口，清水・本田，2011 ; DfEE & QCA，1999 ; QCA，2004 ; 2005 ; 2007c ; Onion, 2010)，さらには，アメリカ NCTM の「スタンダード 2000」(NCTM, 2000）における「プロセススタンダード」をもとに抽出したものである。「定式化」や「数学的・社会的価値認識」を組み込んでいることは，本研究の独自の視点であると考えている。

「B．数学の内容」については，最終的な決定までにどのような数学を用いるかに光を当てることになる。Bの下位要素は，数学の各内容領域にほぼ対応している。

「C．選択支援」については，選択肢の創出や選択における支援ツールとしての数学に光を当てることになる。C-1「シミュレーション」では，表計算ソフトの利用や乱数の利用も視野に入れ，例えば，仮定を変えたときの違いを調べたりすることが考えられる。C-2「指標・指数」は，場面に応じた指標や指数を自ら創出し，判断の根拠として用いることである。C-3「評価式」は，例えば，前節で言及した「ベストカー」では，評価式に基づく「カーオブザイヤー」の決定が取り上げられているが，こうした評価式は，の典型的な事例である。C-4「確率・統計的推測」は，実現可能性やリスクを評価するための確率や統計的推測の利用である。このような支援ツールを用いることで，より根拠の明確な質の高い意志決定が期待できる。

「D．社会的価値観」については，数学的判断プロセスに関わる社会的価値観に光を当てることになる。2.1.3 ①の「社会的価値観とプロセス能力」でも論じたように，意志決定の際には，顕在的あるいは潜在的の違いこそあれ，様々な価値観が意志決定の質や内容を左右することが多い。そして，これまでの算数・数学の授業では，こうした価値観は意図的に排除されてきたといえる。しかし，真正の問題解決にとって，Dの「社会的価値観」という柱は重要であり，これからの算数・数学の授業では，そうした「社会的価値観」を積極的に考慮すべきであるというのが，本研究の基本的な立場である。

以上のようなA～Dによって構成される「数学的判断力の枠組み」と「数学的判断プロセス」との相互関係を図示すれば，図 2-1 のようになる。本研究でいう「数学的判断プロセス」は，2.1.2 でも論じたように，「現実世界の問題」を「数学の問題」に定式化した上で，適切な選択肢を設定し，それをもとに，当初の現実世界の問題に対して，一定の判断を行う一連のプロセスをいう。この「数学的判断プロセス」は，図 2-1 に示すように，A～Dのそれぞれの柱によって支えられ，駆動される過程である，ととらえている。

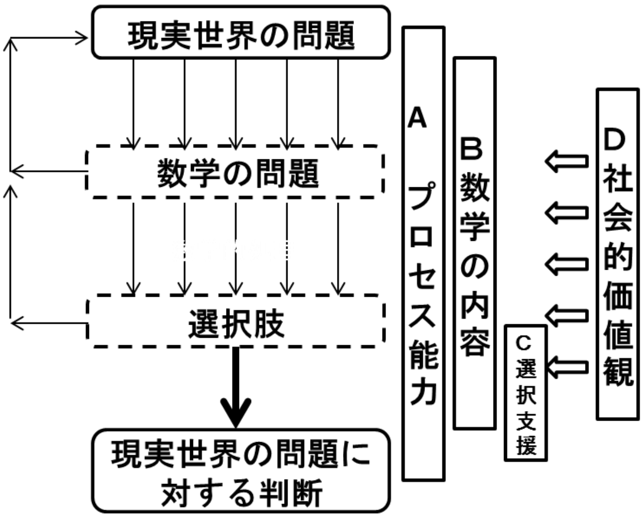


図 2-1　「数学的判断力に関する枠組み」と「数学的判断プロセス」の相互関係

このような数学的判断力の育成をねらっ

た授業では，新たな授業文化の創造をも視野に入れる必要性が示唆される。具体的には，個別や小グループでの解決を行い，学級全体でそれぞれの選択肢を共有し，比較検討することで，質の高い複数の選択肢を創出できる。これは，従来の算数・数学の授業文化を継承することで実現できよう。しかし，選択肢の創出後に，どの選択肢にするかの決定には「正解」があるわけではなく，従来の授業には見られない活動となる。民主的ルールにのっとり，話し合いや多数決等で決めることが考えられるが，その前提として，個々が的確な評価を行う力を高めるための手立ても必要となる。

2.2 「プロセス能力」の評価：「プロセス能力」に関する水準表

授業では，多様な習熟度の子どもが混在する。つまり，ある問題に対して，複数の選択肢を創出し，根拠を明確にし，他者と議論し，選択することのできる子どももいれば，それらを考えることのできない子どももいる。そこで，授業づくりや授業分析において，子どもの状況を子細に把握するためには，数学的判断プロセスの基盤である「プロセス能力」の水準化が必要であると考えた。こうした課題意識の下，本研究で策定した「プロセス能力に関する水準表」が表 2-2 である。表 2-2 の縦軸には，表 2-1 の「A．プロセス能力」の６つの下位要素を配置し，横軸には，６つのプロセス能力に関する水準を設定している。

水準表の策定にあたって特に問題になったのが，横軸を設定するための視点である。つまり，「どのような視点に基づいて水準化を図るか」ということが具体的な検討課題であった。この検討課題については，本研究で注目したイギリスの Bowland Math.（Bowland Charitable Trust，2008；西村・山口・清水・本田，2011）（詳細は第 3 章で述べる）と長崎らの「算数・数学の力」に関する一連の研究（長崎，2007；長崎他，2008）が参考になる。

プロセス能力の育成を主眼として開発された Bowland Math.には，「ケーススタディ」の教材などの学習によって育成されたプロセス能力を評価するために，「評価課題（assessment task）」が収められている。この「評価課題」では，NC の「主要プロセス」に対応させる形で，表 2-3 に示すようなルーブリック（評価基準表）が設定されている。表 2-3 のように，Bowland Math.の「評価課題」に関するルーブリックでは，当該の「評価課題」で必要となるプロセス能力が横軸に配置されている。また，縦軸には，各プロセス能力に関する水準が設けられている。Bowland Math.の「評価課題」に関するルーブリックでは，一般的な水準を設けるのではなく，個々の「評価課題」にそって，個別の水準を設けている点が特徴である。各プロセス能力に関する一般的な水準を設定しているわけではないが，プロセス能力の水準化を図っているという意味で，本研究における数学的判断力に関する水準化にとっても示唆を与える先行研究といえる。

一方，長崎らの「算数・数学の力」に関する研究では，表 2-4 に示すような「算数・数学の力の水準」[4]が設定されている（國宗，2007，pp.68-69）。縦軸には，「算数・数学を生み出す力」，「算数・数学を使う力」，「算数・数学で表す力」，「算数・数学で考え合う力」の「４

[4] 長崎らは，「水準」を，ピアジェの段階判定の５つの規準「階層性」「全体構造性」「統合性」「準備期と完成期」「均衡化」のうち，「全体構造性」を，ある一定の領域や文脈に限って，ある構造の存在を認めようという「領域固有性」の考えが主流となっていることから除いた４つの特徴をもっているものとしている。

	定　義	自己内 水準１ 自己限定的	水準２ 多様性の萌芽	水準３ 社会的	他者との相互作用 水準α ～γ
A-1：定式化 Formalization	現実世界の問題を「数学の問題」に翻訳する（直す）能力	指示された視点にそって，現実世界の問題を「数学の問題」に翻訳する。	自分なりの視点を設定し，その視点から，現実世界の問題を「数学の問題」に翻訳する。	多様な視点を設定し，それぞれの視点から，現実世界の問題を「数学の問題」に翻訳する。	他者がどのような視点を設定し，現実世界の問題を「数学の問題」に翻訳したかを理解する。
A-2：数学的表現 Representing	数学的な表現方法によって，判断過程や判断方法，判断結果を表現する能力	指示された数学的表現方法によって，判断過程や判断方法，判断結果を表現する。	自分なりの数学的表現方法を選択し，判断過程や判断方法，判断結果を表現する。	問題や目的に応じて，妥当な数学的表現方法を工夫し洗練し，判断過程や判断方法，判断結果を表現する。	他者の数学的な表現方法を通じて，相手の判断過程や判断方法，判断結果を理解する。
A-3：数学的推論・分析 Analysing	数学的手続きや数学的推論に基づいて，問題の構造を分析し，判断する能力	指示された数学的手続きや考え方にそって，問題の構造を分析し，判断する。	数学的手続きや考え方を自己選択し，問題の構造を分析し，判断する。	数学的手続きや考え方を自分で工夫したり，つくり出したりしながら，問題の構造を分析し，判断する。	他者の数学的手続きや数学的推論を理解し，その視点に沿って問題の構造を分析・判断する。
A-4：解釈・評価 Interpreting & Validating	もとの現実世界の問題に照らし合わせて，判断過程や判断方法，判断結果を解釈し，それらの妥当性を評価する能力	もとの現実世界の問題に照らし合わせて，自分自身の判断過程や判断方法，判断結果を解釈する。	もとの現実世界の問題に照らし合わせて，自分自身の判断過程や判断方法，判断結果を解釈し，それらの妥当性を評価する。	もとの現実世界の問題に照らし合わせて，自分自身の判断過程や判断方法，判断結果を解釈し，必要があればより妥当性を高めるための修正を行う。	別のアプローチによる判断過程や判断方法，判断結果とも対比しながら，類似点や相違点を比較・検討し，評価する。
A-5：数学的コミュニケーション Mathematical communicating	判断過程や判断方法，判断結果を伝える能力	判断過程や判断方法，判断結果を自己限定的な言語・表現で伝える。	判断過程や判断方法，判断結果について，他者（一般）を意識した言語・表現で伝える。	判断過程や判断方法，判断結果を相手（特定）の理解状況に応じた言語・表現を選択し伝える。	他者の判断過程や判断方法，判断結果を理解し，自己のそれと比較・検討し，練り上げる。
A-6：数学的・社会的価値認識 Realizing mathematical and social value	数学的・社会的価値観に基づいて判断する能力	自分の一つの価値観に沿って数学的判断を下す。	相反することのない，複数の価値観を取り入れて数学的判断を下す。	時には相反する，多様な価値観を取り入れて，妥当な数学的判断を下す。	他者による新規の価値観に基づいた数学的判断を受け入れ，比較・検討し，妥当な数学的判断を下す。

表 2-2　「数学的判断プロセス」における「プロセス能力」に関する水準表

表 2-3　Assessment Task『猫と子猫』に関するルーブリック
（西村・山口・清水・本田，2011，p.12）

表　現	分　析	解釈と評価	コミュニケーションと振り返り
図と時系列の数直線を選ぶ	数えること，計算と正確さ	仮定をおきながら，問題を関係づける	方法，推論，結論の明快さ
簡単な図をかく，あるいは，鍵となる出来事を時系列に数直線にかく。	それぞれの猫が１匹ずつ産むとして，子猫の数を求めている。	もとの問題へ発見を関係づけている。例えば，2000 匹の子孫は現実的かそうではないか。	最初の猫がどれで，それぞれの雌猫から何匹の子猫が生まれるかを伝えることが可能な方法で考え方を表している。
簡単な図をかき，かけ算が適切な道具であることを示している。あるいは，出来事を時系列に数直線にかいている。そして，最初の猫の子以降を考えている。	それぞれの猫が１匹ずつ産むとして，かけ算で子猫の数を求め，それらの子孫をすべて数え上げる必要があることを認識している。	１匹の雌猫あたりの子猫の数についての仮定を明確にしている。例えば，それぞれの雌猫から６匹の子猫が生まれる。	他者が推論を追うことができるように，自分たちの方法を示している。
すべての子孫を示していなくても，かけ算と累乗の双方の方法を表している。	妊娠可能な期間の中で，ほとんどの猫は１匹以上の子猫を産むことを認識している。	１匹の雌猫あたりの子猫の数についての仮定を限定している。例えば，私は一度に産まれる子猫は最大である６とした。	最初から最後まではっきりと，効果的で簡潔なコミュニケーションをし，（部分的な）解決を組み立てている。
初めの子猫とすべてのその子孫を，かけ算と累乗の双方で表す，効果的な方法を選んでいる。	効果的な方法を使って，広範囲にわたる要因を考慮した，説得力のある解決に向かっている。	仮定を一層明確にしている。例えば，１匹も猫が死なない，あるいは，肉体的に可能になればすぐに妊娠する。	振り返りの証拠－例えば，１匹の雌猫につき生まれる子猫の数が結果に大きく影響すること。それとともに，はっきりと，効果的で簡潔なコミュニケーションをする。

進歩

つの力」に関する中項目にそって，それぞれの力の下位要素が配置されている。また，横軸には，それぞれの力について，水準Ⅰから水準Ⅲまでの３つの水準が設定されている。横軸で設定されている水準について，例えば，「算数・数学で説明する力」の場合には，次のような方針によって，水準が設定されているという（國宗，2007，p.67）。つまり，水準Ⅰは，「自分の考えを述べる」水準であるが，「聞き手を意識する」という要素が加わることによって，水準Ⅱの「聞き手を意識して，自分の考えを説明する」水準に移行する。また，この水準Ⅱに「わかりやすく」が加わることによって，水準Ⅲの「聞き手を意識して，自分の考えをわかりやすく説明する」水準に移行するのである。この事例のように，長崎らの研究では，水準上昇のための要因が検討されている点が本研究にとって示唆的である。また，「算数・数学の力」を育成する授業への適用を念頭におきながら，「３つの」水準を設定している点も参考になる。

表 2-4　算数・数学の力の水準－中項目①～⑤ごとに－　（國宗, 2007, pp.68-69）

中項目＼水準	水準Ⅰ	水準Ⅱ	水準Ⅲ
（1）算数・数学を生み出す力			
①算数・数学できまりや方法などを見つける力	1, 2の例からきまりや方法を見つける。	与えられた例のほとんどを考慮して，きまりや方法を見つける。	与えられた例以外を予測し考慮に入れて，きまりや例を見つける。
②算数・数学で前提をもとに確かめる力	前提からすぐに結論に跳んで説明したり，説明しているうちに前提を忘れて説明したりする。	前提を念頭に置いてはいるが，ある部分で結論に跳んで説明する。	前提から話のつながりに妥当な関係をもたせて結論まで説明する。
③算数・数学で多様に考える力	一つの考えを出して終える。	同じような質の考えをいくつか出す。	質の違う考えをいくつか出す。
④算数・数学で関係づけて考える力	関連する内容を思い出す。	関連する内容との共通点や相違点を見出す。	関連ある内容との関係を見出す。
⑤算数・数学で発展的に考える力	考えていた問題をもとにほかの問題を見出す。	考えていた問題をもとに見出した問題の解決に取り組む。	考えていた問題とそれをもとに見出した問題の関連を考える。
（2）算数・数学を使う力			
①現実の問題を算数・数学の問題に直す力	現実の問題を解決するために必要な量や形を指摘する。	現実の問題を解決するために必要な量や形の関係を指摘する。	現実の問題にある量や形の関係を式やグラフなどで表す。
②算数・数学の決まりに従って処理する力	1回のきまりや手続きを行う。	きまりや手続きを継続的に行う。	いろいろな場面できまりや手続きを継続的に行う。
③算数・数学で処理した結果を振り返る力	得た結果が正しいかをもう一度処理し直して確かめる。	得た結果が正しいかを処理の各段階で確かめる。	得た結果が正しいかを全体と関係づけて確かめる。
④算数・数学で予測・推測される力	式や表やグラフなどで，そこに表されていない1つの場合の状態を答える。	式や表やグラフなどで，そこに表されていない複数の場合の状態を答える。	式や表やグラフなどで，そこに表されていない場合の状態とその理由を答える。
⑤算数・数学で感覚的・概括的に判断する力	指示に従って，数，量，形をおよそで判断する。	数，量，形を，厳密な方法とおよそで判断する。	数，量，形を，目的に応じて，およそで判断する。
（3）算数・数学で表す力			
①式・表・グラフ・図などで表す力	指示に従って，式・表・グラフ・図などで表す。	自ら進んで，式・表・グラフ・図などで表す。	目的に応じて，式・表・グラフ・図などで適切に表す。
②式・表・グラフ・図などを使う力	指示に従って，問題の解決に式・表・グラフ・図などを使う。	問題の解決に式・表・グラフ・図などを使う。	目的に応じて，問題の解決に式・表・グラフ・図などを使う。
③式・表・グラフ・図などをよむ力	式・表・グラフ・図などから，そこに表れた数値をよむ。	式・表・グラフ・図などから，そこに表れた数値の関係をよむ。	式・表・グラフ・図などから，そこに表れた数値の関係をよみ，その意味までもよむ。
(4)算数・数学で考え合う力			
①算数・数学で説明する力	自分の考えを述べる。	聞き手を意識して，自分の考えを説明する。	聞き手を意識して，自分の考えをわかりやすく説明する。
②算数・数学で解釈する力	他者の説明を聞く。	他者の説明を聞いて，その内容を言える。	他者の説明を聞いて，自分の考えや他の考えと関連づける。
③算数・数学で話し合う力	話し合いに参加する。	目的をとらえて話し合う。	より洗練された考えを目指して話し合う。

以上のような Bowland Math.や長崎らの先行研究を参考にしながら[5)]，本研究では，次のような考え方で水準化を図ることとした。その考え方の主な特徴は次の２点にある。

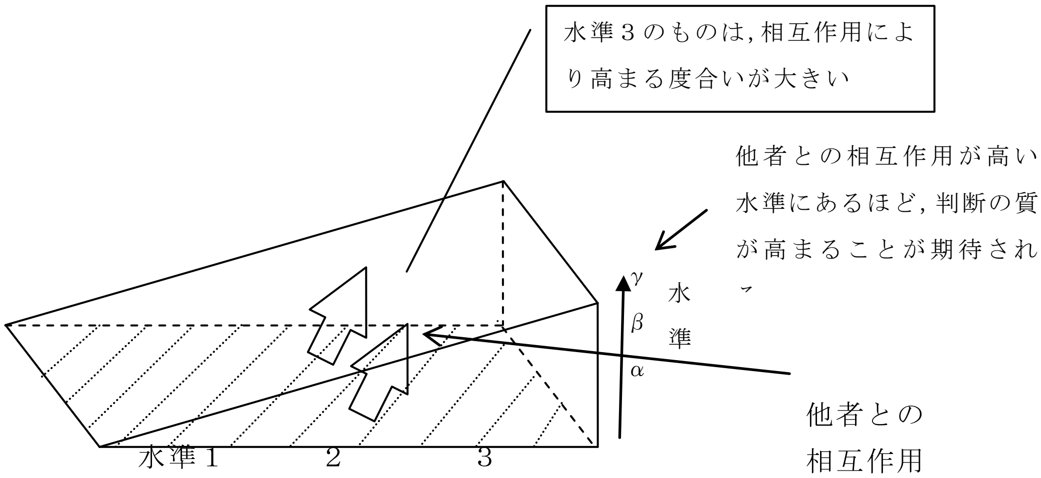
第一の特徴は，「個人内」における「プロセス能力」の水準の上昇という視座から，６つの「プロセス能力」に共通する水準として，「自己限定的」，「多様性の萌芽」，「社会的」とよばれる３つの水準を設けた点である。「A-1　定式化」を例にしながら，これら３つの水準を概観しよう。「A-1　定式化」の「水準１」は，「指示された視点にそって，現実世界の問題を「数学の問題」に翻訳する」となっている。「指示された視点にそって」とあるように，水準１では，与えられた視点に基づいて，現実世界の問題を数学の問題に翻訳できる水準である。言い換えれば，自分自身の視点を設定することができない水準である。それに対し，水準２は，「自分なりの視点を設定し，その視点から，現実世界の問題を「数学の問題」に翻訳する」水準である。つまり，与えられた視点に基づいて，現実世界の問題を数学の問題に翻訳できるだけではなく，自分なりの視点を設定できることが，水準２では求められる。さらに，水準３は，「多様な視点を設定し，それぞれの視点から，現実世界の問題を「数学の問題」に翻訳する」となっている。水準３は，１つの視点ではなく，多様な視点を自ら設定できる水準である。「A-1　定式化」以外の他の５つのプロセス能力の水準についても，同様の視座から水準の設定を図っており，６つのプロセス能力に共通する水準を設定し，水準化を図っている点が表２の水準表の特徴である。

第二の特徴は，水準の上昇に寄与する主要な要因として，「他者との相互作用」という視座を導入した点である。本研究でねらっている「水準」は，あくまで，授業づくりの際の目標概念であり，授業における子どもの思考の様相をとらえる基準として利用されるものである。したがって，「水準」は，実際の授業を分析したり，授業づくりを行うためのツールとして機能するものでなければ意味がない。授業づくりにあたって，「個」という視点だけではなく，「他者」は無視できない視点であることを考慮した上で，「個人」のプロセス能力の水準を押し上げる要因として，「他者との相互作用」を設定した。授業づくりの際に，「他者との相互作用」の質を高めるという視点をもつことで，他者との相互作用の機会（例えば，ペア，小グループ，練り上げなど）を工夫することができると考えられる。なお，表２の縦軸には「A-5：数学的コミュニケーション」が配置されているが，縦軸の各要素は，あくまで「個」のプロセス能力に注目した要素であるという点において，「他者との相互作用」とは一線を画すものである。

こうした「他者との相互作用」による「自己内」のプロセス能力の水準上昇を概括的にイメージするならば，それは，図 2-2 のようになると考えている。「他者との相互作用」は，相互作用の対象集団（ペア，小グループ，学級など）の総体としての「力」である。したがって，その質に違いがあることが想定されるけれども，そうした質的相違を一般的に記述することは難しい。そのため，本研究では，対象集団の質に違いがあり，高い水準にあ

5　長崎らは「算数・数学の力」の水準を設ける理由を，次のように述べている。「算数・数学の力の育成にあたって中項目として示した力を質の高まりという点から一層具体化するためであって，その結果，学習指導の方向性やあり方が明確になることを期待してのことである。」そして，その区分は，「ピアジェのように意図的な実験に対するデータに依っているのではなく，子どもの理解や達成の状況に関する私たちの考察・分析に基づいて行われたものである。」としている。本研究も，同様の立場で「水準」を考えていく。

るほど，判断の質が高まることが期待されることを明確化するために，水準α，β，γとだけ記している。それ故，「他者との相互作用」の実際の分析は，個々の授業の教材や対象集団に依存することになると考えている。



（注）底面が個人内，斜面が他者との相互作用があったときに発揮される様相

図 2-2　プロセス能力に関する水準上昇の概念図

2.3　本章のまとめ

本章では，本研究で考察する「数学的判断力」の理論的枠組みを提案した。その全体像は，表 2-1 の「数学的判断力に関する枠組み」になる。この枠組みは，数学的判断力の育成を目的とする授業づくりのための規範的枠組みである。同時に，それは，授業における子どもたちの数学的判断力の分析や，本研究で開発・実施した数学的判断力に関する実態調査の分析の基盤になるという点において，記述的枠組みといえるものである。

一方，表 2-1 に示した「数学的判断力に関する枠組み」において，「A-1 プロセス能力」は重要な柱であり，授業づくりの要になるものである。そうした認識の下，本研究では，表２に示すような「プロセス能力に関する水準表」を開発した。本研究で提案する「プロセス能力に関する水準表」は，次のような研究の意義やオリジナリティーをもつと考えている。

本研究で提案した「プロセス能力に関する水準表」の意義としては，「プロセス能力」の評価に着目している点があげられる。わが国における算数・数学の評価については，いわゆる「新しい学力観」が強調されて以降，情意面や数学的な考え方の評価が強調されるようになったが，今日でも，「内容」に関する理解や定着を主眼とする評価に偏向する傾向にあることは否めない。また，近年では，表現力や判断力，思考力の育成が重視されており，いわゆる「プロセス能力」の評価の具体化が喫緊の課題になっているといえる。こうした動向の中，表２に示した「プロセス能力に関する水準表」は，これまで光が十分に当てられてこなかった「プロセス能力」に関する評価の推進に資するものと考えている。

その意味で，イギリスの NC やアメリカの「スタンダード」は，プロセス能力の評価に

先鞭をつけたものといってよい。しかし，これらのカリキュラムで示されているプロセス能力に関する水準は，各プロセス能力に関する「一般的な」水準であったり，幅広い発達段階に関する水準となっており，個々の授業への適用を意図したものではない。実際，例えば，イギリスの NC における「主要プロセス」に関する「到達目標（attainment targets）」は，幼稚園から高等学校までを視野に入れたものであり，幅広い学年帯を視野に収めた水準となっている。この点において，本研究で提案した「プロセス能力に関する水準表」は，数学的判断力において求められるプロセス能力に焦点化して水準化を図った点や，授業づくりへの適用を意図している点において，オリジナリティーがあると考えている。

［本章の引用・参考文献］

飯田慎司・山下昭・隅正幸・小森晃（1994），「算数学習におけるオープンエンドの問題による価値認識に関する研究（１）：研究の概略と第１次報告」，九州数学教育学会，『九州数学教育学研究』，第１号，pp.32-43.

飯田慎司（1995），「オープンエンドの問題解決と Humanistic Mathematics について」，日本数学教育学会，『第 28 回数学教育論文発表会論文集』，pp.243-248.

角屋重樹（研究代表）（2010），『学校における持続可能な発展のための教育（ESD）に関する研究［中間報告書］』，国立教育政策研究所.

國宗進（2007），「第４章　算数・数学の力の水準」，長崎栄三・滝井章編著，『算数の力：数学的な考え方を乗り越えて』，東洋館出版社，pp.62-73.

国立教育政策研究所監訳（2004），『PISA 2003 年調査・評価の枠組み・OECD 生徒の学習到達度調査』，ぎょうせい.

小橋康章（1988），『認知科学選書 18　決定を支援する』，東京大学出版会.

佐伯胖（1980），『「きめ方」の論理－社会的決定理論への招待－』，東京大学出版会.

島田功（2009），「算数において意思決定力の育成をめざす授業に関する研究」，日本数学教育学会，『算数教育』，第 91 巻，第 12 号，pp.20-30.

島田茂（1942），「數學教育再構成ノ一ツノ方向」，『日本中等教育數學會雑誌』，第 24 巻，第１号，pp.6-14.

竹村和久（1996），「第４章　意思決定とその支援」，市川伸一編，『認知心理学４　思考』，東京大学出版会，pp.81-105.

中村力（2008），『ビジネスで使いこなす　入門　定量分析』，日本実業出版社.

長崎栄三編著（2001），『算数・数学と社会・文化のつながり』，明治図書.

長崎栄三（研究代表）（2007），『算数・数学において育成する諸能力とその系列に関する研究』，国立教育政策研究所科研成果報告書.

長崎栄三他 23 名（2008），「算数・数学教育の目標としての「算数・数学の力」の構造化に関する研究」，日本数学教育学会，『算数教育』，第 90 巻，第４号，pp.11-21.

西村圭一・山口武志・清水宏幸・本田千春（2011），「数学教育におけるプロセス能力育成のための教材と評価に関する研究－イギリス「ボーランド数学（Bowland Maths.）」の考察－」，日本数学教育学会，『数学教育』，第 93 巻，第９号，pp.2-12.

馬場卓也（2009），「算数･数学教育における社会的オープンエンドな問題の価値論からの考察」，

全国数学教育学会,『数学教育学研究』, 第 15 巻, 第 2 号, pp.51-57.
Bowland Charitable Trust（2008）, *Bowland Maths: An imaginative resource for teaching mathematics Key Stage 3.*（DVD マニュアル）.
DfEE & QCA（1999）, *Mathematics: The national curriculum for England*.
Greer,B.（2007）, A sense of proportion for social justice, *Philosophy of Mathematics Education Journal*, No.21. (http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome21/).
Lesh,R. & Zawojewski,J. （2007）, Problem solving and modeling, Lester,F.K. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, NCTM, pp.763-804.
Mukhopadhyay,S. & Greer, B. （2001）, Modeling with purpose: Mathematics as a critical tool, *Sociocultural Research on Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, pp.295-311.
NCTM（2000）, *Principles and standards for school mathematics*.
Onion,A.（2010）, *The national context in England for Bowland Maths*.（2010 年 11 月 16 日インタビュー調査, PowerPoint 資料）.
Pollak,H.O.（2003）, A history of the teaching of modeling, *A History of School Mathematics*, Vol.1, NCTM, pp.647-671.
QCA（2004）, *The key skills qualifications standards and guidance*.
QCA（2005）, *National standards for adult literacy, numeracy and ICT*.
QCA（2007a）, *Mathematics: Programme of study for key stage 3 and attainment targets.*
QCA（2007b）, *Mathematics: Programme of study for key stage 4.*
QCA（2007c）, *Functional skills standards*.

第３章　イギリス数学教育改良プロジェクト Bowland Maths.について

本章では，イギリスのキーステージ 3（11 歳から 16 歳）を主な対象とした，数学教育改良プロジェクト Bowland Maths.の，「ケーススタディ」と呼ばれる教材，それを指導するための教師教育に当たる「教師教育モジュール」，子どもの評価のための「評価課題」を，数学的判断力の視座から考察する。

「ケーススタディ」では，子どもが判断の必要性を感じる問題場面を，ビデオクリップ，ソフトウェアなどとともに提供している。一方，それを用いて，プロセス能力に焦点を当てた授業展開にするには,内容指向の授業とは異なる指導スキル－発問の工夫，ペアやグループでの問題解決の支援等が必要とされる。そのようなスキルの育成のために，5 つの教師教育モジュールを設けている。これらは，教師にとって課題となるポイントを集約して構成されたものであり，その内容は日本の教師教育を考える上でも示唆に富んでいる。「評価課題」は，個々の課題で，プロセス能力を横軸，それらの水準を縦軸に配置したルーブリックを用いて測ろうとしており，数学的判断プロセスにおける「プロセス能力」の評価の方法について示唆的である。

3.1　背景

3.1.1 カリキュラムにおける動向

イギリスでは，1989 年にナショナルカリキュラム（以下，NC）が導入され，数度の改訂を経て，現在に至っている。NC では，5 歳から 16 歳までの義務教育期間を四つのキーステージ（以下，KS）に分け，目標や内容，到達目標などが示されている。四つの KS のうち，KS1（第 1，2 学年）と KS2（第 3～6 学年）が初等教育にあたり，KS3（第 7～9 学年）と KS4（第 10，11 学年）が中等教育にあたる。

2007 年に，KS3 と KS4 に関する NC が改訂され（QCA, 2007a; 2007b，以下，二つをあわせて NC2007 と略記），2008 年 9 月から実施されている[6]。KS3 と KS4 は，扱われる内容の違いなどがあるものの，その構造や基本的な方針はほぼ同じであり，以下の項目によって構成されている。

①カリキュラムの目的，数学の重要性
②主要概念

[6] 初等教育段階（KS1 および KS2）については，1999 年版 NC が適用されている。なお，政権交代にともない，中等教育段階に関する NC2007 についても，検討作業が再び始まっている。そのため，近い将来，初等・中等教育全体を見通したカリキュラムの改訂が行われる見込みである。

③主要プロセス（key processes）
④領域と内容
⑤カリキュラムのための機会
⑥到達目標（attainment targets）

これらのうち，以下では，本研究に特に関連する③，⑥について言及する。③の「主要プロセス」は，数学における本質的な技能やプロセスを意味しており，問題解決やデータ処理のサイクルの様々な段階と関係するものである。これには，「表現すること」「分析すること」「解釈したり評価すること」「コミュニケーションを図ったり振り返ること」の四つが示されており，NC における「プロセス能力」のとらえ方や要素を示したものとして注目される。また，⑥の「到達目標」は，評価の枠組みを示したものであり，NC の従来からの特徴となっている。NC2007 でも，到達目標が「数学的プロセスと応用」「数と代数」「幾何と測定」「データ処理」の四つの領域ごとに設定されている。そして，各領域には，それぞれ九つの水準（レベル１～８および優れた達成度）が設けられ，到達目標の水準の範囲が KS ごとに大局的に示されている。例えば，KS3 の場合，水準の範囲は，「水準４」から「優れた達成度」にわたる六つである。特に注目される点は,「数学的プロセスと応用」という項目の下で，③の「主要プロセス」にかかわる到達目標とその規準がカリキュラムに明記されている点である[7]。

このように，NC2007 では，「主要プロセス」や「到達目標」といった項目において，プロセスの要素やその水準が具体的に示され，それが従来の NC 以上に強調されるようになっている。

3.1.2 評価に関する動向

上で述べた「到達目標」は，学校の教師による内部評価であり，「学習のためのアセスメント」（AfL）プロジェクト等を通じて，形成的評価の推進も図られてきた（OECD 教育研究革新センター，2008，pp.162-165）。

一方で，外部評価も充実しており，その多くは，「資格（qualification）制度」として具体化されている。イギリスでは，地域によって差はあるものの，進学先や就職先に応じた資格の取得が求められている。例えば，KS4 修了時には，16 歳の生徒を対象として，科目ごとに「中等学校修了資格試験」（General Certificate of Secondary Education，通称 GCSE）が実施される。GCSE は，外部の評価団体が実施する中等教育修了に関する資格認定試験で，科目ごとに水準評価がなされ，合格の場合にのみ，修了資格が認定される。KS1 から KS3 の各 KS 修了時にも「ナショナルテスト」の受験が義務づけられている。イギリスでは，資格取得という制度や伝統の下で，NC という一種の「スタンダード」と「テ

7 初等教育段階（KS1 および KS2）については，1999 年版 NC が適用されている。政権交代にともない，中等教育段階に関する NC2007 についても，検討作業が再び始まり，2013 年 2 月に初等・中等教育全体を見通したカリキュラムのドラフト版が公開され，2014 年から実施される予定である。
https://www.education.gov.uk/schools/teachingandlearning/curriculum/nationalcurriculum2014/b00220600/consultation-national-curriculum-pos/draft-pos-subjects （2013 年 3 月現在）

スト」とが関連づけられており（冨田，2007，p.69），評価における大きな特徴となっているのである。

さらに，NC 以外にも，各種の「スタンダード」が刊行され，それに対応した「資格テスト」が設けられている。そして，本研究で注目しているプロセス能力についても，「スタンダード」という形で，そうした「資格テスト」で評価されるプロセス能力の具体像が示されている[8)]。本研究の目的に照らした場合，近年公表されているプロセス能力に関わる「スタンダード」としては，特に次のものが注目される。

(A)QCA(2004), *The key skills qualifications standards and guidance.*
(B)QCA(2005), *National standards for adult literacy, numeracy and ICT.*
(C)QCA(2007c), *Functional skills standards.*

(A)では，「コミュニケーション」，「数の利用（application of number）」，「ICT」，「他者との協働」，「自己の学習と行動の改善」，「問題解決」の六つの「キースキル」に関するスタンダードが示されている。これらは，ポートフォリオに基づく質的評価や「キースキルテスト」によって，水準 1 から水準 5 までの 5 段階で評価されることになっている。数学に深くかかわる「数の利用」は，《数に含まれる情報を解釈し，計算し，結果を解釈し，結論を提示するためのスキル》であり，「収集→処理→解釈」という一連のプロセスにおいて必要となるスキルを意味している。

(B)は，成人のためのリテラシーやニューメラシー，ICT に関するスタンダードである。リテラシーとニューメラシーについては，Edexcel[9)]によって「Adult Literacy and Adult Numeracy」（通称 ALAN）とよばれる「資格テスト」が実施されている。ALAN は，「データ処理」，「数」，「測定，図形と空間」の三つの視点からニューメラシーを 5 段階（エントリーレベル 1,2,3 とレベル 1,2 の計 5 段階）で評価するテストである。

(A)や(B)のスタンダードは，それぞれ独立したものではあるが，相互に密接な関連がある。実際，(B)では，(A)の「キースキル」や(B)の「ニューメラシー」の各水準とともに，「国家資格に関する枠組み」（National Qualifications Framework，通称 NQF）や NC の水準との対応が明記されている（QCA，2005，p.5）[10)]。

(C)は，英語と数学と ICT の三つに関するスタンダードである。数学については，「プ

---

[8] 例えば，QCA(2004)では，「数の利用（application of number）」に関する「キースキル」が，「パートＡ」と「パートＢ」の二つの区分にしたがって，水準１から水準４までの４段階で示されている。いずれの水準においても，「パートＡ」は，「You need to know how to:」という文言で始まっており，当該水準のねらいや習得すべきスキルが示されている。例えば，水準３の場合，「パートＡ」は，「活動を計画し，情報を解釈する」，「計算を実行する」，「結果を解釈し，見出したことを提案する」という三項目にそって具体的なスキルが示されている。一方，「パートＢ」は，「You must:」という文言で始まっており，当該水準で到達すべき具体的な行動目標が例示されている。

[9] 下記の Edexcel のホームページによれば，Edexcel は，イギリス内外における学校や大学，職場，その他の学習の場に対して，学術的かつ職業的な資格を提供するためのイギリス最大の認定機構である。Peason 社がその運営にあたっている。
http://www.edexcel.com/aboutus/Pages/AboutUs.aspx

[10] NQF には，リテラシーに対応する「エントリーレベル」から大学院博士課程に対応する「水準８」までの九つの水準が設定されている。

ロセススキル」に基づく「機能的（functional）数学」という概念が提唱されている。ここでいう「プロセススキル」は，次のように説明されている。

《生活や職場で数学を効果的に利用することができる個人に求められる基礎は，次のような能力である。それは，数学的情報を理解する能力や，その情報を利用したり処理したりする能力，自分自身の活動の結果を解釈したり分析する能力，そして，それらを他者に提案する能力である。》（QCA,2007c , p.19）

また，このような「プロセススキル」の鍵となる属性は，「表現する」（シツエーションを理解し表現すること），「分析する」（数学を処理し利用すること），「解釈する」（分析の結果を解釈し伝えること）の三つであると指摘し，これらを「機能的数学」の基本的な枠組みとしている（QCA，2007c，p.20）。

そして，この「機能的数学」にも五つの水準（エントリーレベル 1,2,3 とレベル 1,2）が設けられている。各水準は「達成度」と「範囲」の二つの視点から構造化され，NC や(B)の水準との対応も明記されている。また，「機能的数学」の評価は，水準ごとに作成されている Edexcel のテストによってなされるようになっている。「機能的数学」に関するテストは，近年，GCSE とあわせて実施される傾向にあり，重視されている（Onion, 2010）。

これら三つの「スタンダード」に共通する興味深い点は，第一に，学校に在学する学生はもちろんのこと，仕事をもつ社会人までも対象としていること，第二に，NC や他の資格制度との対応を明確に示している点である。

以上のことから，イギリスでは，NC の「主要プロセス」で指摘されている「表現すること」「分析すること」「解釈したり評価すること」「コミュニケーションを図ったり振り返ること」が，文字通り，プロセスに関する「主要な」能力ととらえられていることがわかる。

このようにプロセス能力が強調されているが，その育成のための具体的な教材と，その教材に基づく生徒の具体的活動に関する評価の枠組みは，伝統的な数学の内容のそれらに比べると，十分に開発されていない実態があったという[11]。このような状況下に，ある会社から，数学教育の改善のための基金（200 万ポンド）の申し出があったのが Bowland Maths.（以下，BM）の始まりである。そして，BM は，NC や上述の各種の「スタンダード」, 資格制度などにおける「プロセス」重視の方針を反映し，プロ

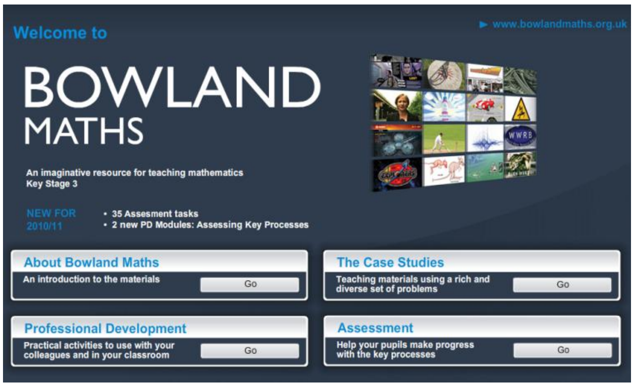


図 3-1

[11] 2010 年 11 月 15 日から 11 月 19 日にわたって，筆者らがイギリスにおいて実施した「ボーランド数学」に関する調査において，本稿で報告したイギリスの現状が関係者から指摘されている。BM のプロジェクトリーダーの Quentin Thompson 氏によれば，「実際の授業は，内容重視で，ルーティンでクローズドな学習が大半となっていた」。

セス能力の育成に焦点化し，また生徒の達成度や数学に対する態度に関して低下傾向が顕著だった KS3，特にその中間層の能力を持つ生徒（中間 75%）をターゲットとして開発された。「ケーススタディ」と呼ばれる教材，それを指導するための教師教育に当たる「教師教育モジュール」，子どもの評価のための「評価課題」の三部構成から DVD（図 3-1）を，ある企業の基金 200 万ポンドと政府機関である DfES(Department for Education and Skills)からの補助金 200 万ポンドを費やして作成している。教材（教師用指導書やワークシート等を含む)だけを用意しても,授業の改善には至らないという考えに基づいている。すなわち，開発した教材を授業で扱うための指導力と，どのようにプロセス能力が伸長したかを測定する評価課題がなくては，開発した教材はいわば「絵に描いた餅」に過ぎないと考えられているのである。

3.2　ケーススタディについて

3.2.1　ケーススタディとは

BM の「ケーススタディ」は，ビジネスをはじめ法律や医学分野の教育で取り入れられている,「現実の問題を取り上げ，その思考過程を通じて学習していく方式」を応用したもので，生徒どうしの議論を促しながら，思考力，推論する力，分析力，想像力，問題解決能力等の育成や,数学に対する見方や態度の転換を意図している。これが教室で用いる「教材」に当たる。

「ケーススタディ」の開発に際し,次のような条件で「ケーススタディ」を公募した（2010 年 11 月 17 日現地調査時の配布資料より)。

- それぞれのケーススタディに用いられる問題は，それぞれ複雑な解釈を要求し，ターゲットとする年齢の多くの子どもに興味深いものとする。
- 生徒にとってオープンな課題で，考えることや推論すること，問題解決を促進し，お互いに考えを伝え合ったり，吟味したり，見慣れない問題に取り組むときの技能を洗練したりすることを含むものとする。
- 問題は，あまりにもすぐに数学へ移行してはならない－実際，最初は必要とされる数学さえ明らかであるべきではない。現在の「問題解決」の例は，しばしば，数学へあまりにもすぐにジャンプし，手順の「使い方」を練習する偽りの機会にすぎない。
- 様々な数学の考えを，様々な文脈，特に，生徒が数学が関係していると思わないような文脈で用いるものとする。
- どのケーススタディも，キーステージ 3 のトピックを積極的に使用することを含むべきだが，ルーティンな数学の手順の必要性は制限されるべきである。また，カバーする概念に対して何らかの形の形成的評価が行われるべきである。
- 必ずしもすべての問題で必要というわけではないが,いくつかの問題は ICT の利用を必要とする。
- いくつかの問題は，男子女子のどちらかに，より興味を引くものでもよい。
- それぞれの問題は，多様な能力の生徒に応じて，様々なレベルの難易度（コンピュータゲームにあるような）でアプローチや解決が可能なものとする。

- いくつかの問題は，科学と同様に，芸術やデザイン，地理，スポーツのようなキーステージ 3 の他の教科と関連をもつ（例えば，オリンピック，コンピュータゲーム，探検，空間，ファッショ音，料理，携帯電話，暗号，健康と病気などが含まれてもよい）ものとする。
- リソースは，Web を含め，見つけやすくアクセスも容易なようにする。
- 応募者は，すでに利用可能なリソースや，例えば日本やハンガリーのような国で同年代の子どものために開発された，同様のリソースを使用している授業を参照してもよい。
- それぞれのケーススタディで開発される教材は，生徒や教室のためだけではなく，特定のケーススタディの細部において，教師のトレーニングに役立つものとある。

すなわち，子どもが，数学が関係していると思っていない，オープンエンドな問題場面を取り上げ，プロセス能力を発揮しながら，様々な数学を利用して解決を進めるという，設計思想が読み取れる[12]。まさに，現実世界の「真正な」問題解決を，教室において実現しようということである。

3.2.2　ケーススタディの概要

上述の公募に対して 250 のアイデアが寄せられ，最終的に以下の 18 のケーススタディ（イングランド国内の大学・研究所 11(8)，教師等 2(2)，教材開発会社等 2(2)，米国教材会社 1(1)，豪州大学・研究所 2(1)，(　)内は機関数）が DVD におさめられた。2012 年には，さらに８つのケーススタディが web ページ上で公開された。これらのケーススタディの概要をまとめると，表 3-1 の通りである。（なお，それぞれのケーススタディの詳細は，本報告書巻末の付録を参照されたい。）

なお，これらのケーススタディには，教師用ガイドやワークシートが必ず付いている。ビデオクリップやソフトウェアがついているものも多いが，すべてではなく，ICT も使用しないで展開できるものもある。また，いずれのケーススタディも，ペアや小グループで取り組むことを推奨している。

〇数字は，付属のソフトウェアがあるもの

	ケーススタディ名	概　　要	主な数学的活動
①	クラッシュテスト	車の衝突事故の衝撃度について，付属のソフトウェアを使いシミュレーションし，車種（コンパクトカー，スポーツカーなど）ごとの安全性について考察する。	速度，車のデザイン，安全対策のタイプ等の変数を制御する。仮説を立て，シミュレーションの結果を観察することによって検証する。わかったことを説明する。
②	ハイウェイ・リンク	ある町に，新しいバイパスを設置する際のルートを，安全性や環境	環境や安全等の制約を考える。道路の曲率と速度の関係に関するデ

[12] この背景には，指定された数学を用いることと，自ら必要な数学を選択し用いることには質的な違いがあるという考えがある。詳細は，Malcolm Swan 氏の講演 *Process skills in Mathematics Education and Bowland Maths.*『学芸大数学教育研究』，第 24 号，2012，pp.11-32 を参照されたい。

	設計	への影響，費用を考慮しながら決める。	ータやグラフと，付属のソフトウェアから得られる曲率を用いて，ルートを見つける。コストを計算する。最適なルートを提案する。
③	暮らしの中の危険	様々な活動に潜む死の危険度をどのように数値化するのか，また，それは同年齢層の一般的な人の死の危険度と比べてどの程度のものなのかについて考察する。	現在の死因に関する認識を，実際の統計データと比較する。非常に高いあるいは低い確率について解釈し，行動と態度について何が言えるかを考える。ランダムな変動について探究する。
④	ピザは温かいままで	宅配ピザのパッケージの保温効果を調べ，温かいピザを届けることができる配達地域を決める。	パッケージを選び，ピザが冷めていく様子を測定し，関数モデルをつくる。妥当な配達地域を決める。
⑤	マイ・ミュージック	さまざまな曲を聴き，ジャンルや曲のタイプでの類似性や差異を分析し，売り上げチャートの上位にある曲や自分の好きな曲を特徴づける。	音楽の個々のジャンルの特徴を記述する。音楽のテンポ等の変数を用いて，複合量（例えばビート/分）をつくり，用いる。
⑥	ミステリー・ツアー	旅行会社において，様々な条件を加味しながら，限られた予算内で旅行客に満足してもらえるようなツアーを企画する。	条件を満たした上で，満足度を上げる方法を考える。通貨の換算をする。
⑦	商品開発競争	市場調査をしたり，カロリーや味について考慮したりしながら，新しいスムージードリンクの商品開発をする。パッケージもデザインする。	アンケートをつくり，新しい商品のための市場調査をする。最適なカロリーや味を得られるような材料の混合を考える。ある容積のパッケージをデザインする。
⑧	交通事故を減らそう[13]	交通事故が多発して困っている町の過去 4 年間の交通事故のデータを分析し,どこにどのような対策を講じればよいかを考え，町議会に提出する対策プランを作成する。	付属のソフトウェアを用いて，町の事故に関するデータベースを探究する。データを層別し，交通事故を減らす上で最も効果的な予算の使い方を決める。プランをつくり，それを提案する。
⑨	スピードカメラ	「スピードカメラは交通事故の原因となっているかもしれない」という報道の真偽を検討する。	確率が一定であってもいろいろな場合が起こり得ることや，ランダム性について探究する。それをもとにスピードカメラの効果を考え

[13] 8 と 17 の両教材は http://www.bowlandjapan.org/index.html において無償公開している。

			る。様々な場所でのスピードカメラの効果についてシミュレーションする。
10	インかアウトか	1960 年代に開催されたクリケットの試合での，審判の判定が正しいかったかどうかを考察する。	写真やスローモーション映像を使って，打者が in か out かを質的に，さらに量的に判定する。変数を選び，距離や時間，速さを見積もり，代数モデルを利用する。
11	カンガルーの赤ちゃんの保護	親に捨てられたカンガルーの赤ちゃんの種や月齢を特定し，給餌プログラムを決める。	尾の長さと足の大きさ，成長に関するデータのグラフから，種と月齢を特定する。カロリー表から適切な栄養分を考える。考案した給餌プログラムと，その正当性を示す。
12	日時計	様々なタイプの日時計（赤道式日時計，水平式日時計など）を作成するとともに，それからわかる時間の誤差を修正する方法について考える。	対称，展開図，グラフ，表を使いながら，日時計をデザインし，数学を用いて確認し，製作する。
13	利用可能な水の量	中近東および北アフリカの国々へ水資源を提供する任務を負った国際支援機関の立場で，水の提供の必要性に関わる指標をつくり，各国における水の利用量を決める。	直面している複雑な状況を分析し，必要な変量を見いだす。複合量（例えば，一人当たりの水使用量）をつくり，それを利用して，「公平な」分配を提案する。
14	君の判断は?	「開会式を行うオリンピックスタジアムのフィールドが，全選手が出席できるだけの広さがあるか」，「学校の屋根に降った雨を貯めれ ば，トイレで利用するのに十分な量が得られるか」等に，様々な仮定をおいて，見積もりをすることを通して結論を出す。	問題場面の構成要素を見いだす。日常的な知識を結びつけて仮定をおき，適切な見積もりをする。

⑮	アウトブレイク	ウィルス感染による病気拡大を阻止する科学者となり，感染者の発見につながる戦略を考え，ワクチンを開発し，ウィルスの拡大を最小限に抑えるためのワクチン接種計画をつくる。	座標平面に示される手がかりを用いて，感染者を見つける。比の考えを用いてワクチンをつくる。スプレッドシートを活用しながら，限られた量のワクチンをもっともうまく利用するワクチン接種計画をつくる。
⑯	ポイント・ゼロ	ある都市から脱出するというアドベンチャーゲーム形式で，課せられる問題を順に解決していく。	数（数列）や空間（回転と移動），論理（暗号と位置）に関するパズルを解く。
⑰	エイリアン	修学旅行中に，宇宙船が飛来し，宇宙人に遭遇するというストーリーの展開に合わせて，テレビやラジオから得られる情報（ビデオクリップ）をもとに避難方法を考える。	宇宙船がいる位置を知るために，距離や方向を見積もったり求めたりする。グラフや地図を読みとり，避難場所とそこまでの最短ルートを決める。独房から逃げるために暗号を解読する。
⑱	探検家	2084 年，銀河の末端でどうにか生き凌いでいるというストーリーのもと，任務として課せられる問題を解決していく。	燃料や食物備蓄，距離に関して配慮しながら，安全なルートを見いだす。架空の通貨単位を使って，惑星間で貿易をする。関数を使って小惑星を破壊するための爆弾を設置する場所を決める。
⑲	宇宙動物園	衛星ツアーアトラクション *AstroZoo* を守るために呼ばれたコンサルタントの役割を演じる。外来生物が保護されている 4 つのバイオドームが直面している重大な環境問題を解決する。	それぞれのドームにおいて利用可能な酸素で何匹の生物を維持できるかを見いだす。食料生成植物と酸素生成植物の正しいバランスを見つける。パワー生産パネルと熱シールドの数を最適化させることにより気温を安定させる。捕食問題を解決する。
⑳	ダンス・スター	様々なジャンルのダンスの動きを，数学的言語や表記を用いて捉えたり，伝えたりする。	様々なジャンルのダンスのビデオを見ながら，それぞれのダンスに含まれている動きについて探究する。それらを，自ら工夫したノーテーション（ダンスの譜面）に，どのように表わすかについて考える。
㉑	サッカー	「スワンズコンプ・タイガース」というユースチームのトレーニ	ビデオクリップを見て，データを収集する。シャトルランやドリブ

		ングや練習でのデータをもとにしながら，選手のポジションや，よいパスとそのカット，PK について探究する。	ルのタイムや心拍数の変化のデータをもとに，選手のポジションを決める。パスの成功またはカットされたときの相手との距離やボールの速さをもとに，パスをするときの距離やディフェンスの位置について探究する。PK が成功したコースのデータをもとに，どこに蹴ると成功しやすいかを探究する。
㉒	熱帯雨林	多国籍伐採組織 Log Inc.により行われている違法活動を捜査し，摘発するミッションに従事する。	ビデオクリップから得られる情報をもとに，適切なベースキャンプの設営場所を決める。1 週間に製作された材木の本数から，伐採量を見積もる。森林を売ってしまおうとする原住民を説得するための資料をデータに基づいて作成する。Log Inc.に発見されてしまい，森林から脱出する方法を探る。
㉓	野外コンサート	野外コンサートの運営者の立場になり，コンサートを成功させるために，次々と起こるハプニングに対応していく。	前日に大雨が降り，水浸しになった会場から水を汲み出す計画を立てる。脱走した牛が乱入しないようにするために必要な柵について探究する。熱狂した群衆から歌手を守るために使用するヘリコプターがホバリングをする場所を探る。
㉔	ファッショニスタ	ブティックの経営者の立場になって，年齢層別のファンションのトレンドを探り，価格や仕入れ数等を探る。	本ケーススタディ用のソフトウェア Trendsetter のシミュレーションを用い，8 週間の購買パターン，価格を変えたときの影響等を，表やグラフを用いながら分析する。その結果と自分の街や地域の人口数や特徴をふまえ，どれだけ仕入れる必要があるかを考察する。
㉕	マスコットのデザイン	グラフィックデザイナーの立場になって，ある学校のマスコットを，コンピュータ画面で，ピクセルごとに色を指定する方法で製作する。	拡大縮小や相似な図形の面積比等をの考えを利用し，要望にかなうマスコットを製作する。

26	オリンピック	オリンピックでは女子の参加の方が男子より遅かった種目が数多くあることに注目し，「女子の方が男子よりも優勝記録のよくなりかたがよい」という仮説について探究する。	様々な種目において，外れ値を意識しながら，男女それぞれの改善の「トレンド」を捉え，比較する。

以下では，イギリス現地調査[14)]において実際に授業を観察したケーススタディである『商品開発競争』，『交通事故を減らそう』を取り上げる，そして，上述の公募条件にある理念がどのように実現されているかを，授業の実際をふまえながら考察する。

3.2.3 『商品開発競争』について

①概要

ソフトドリンク会社の実習生になり，最高のスムージードリンクを開発するという設定のもと，他の社員（生徒）と協力し，アンケートを作成し，市場調査をする。その結果をふまえ，カロリーや味についての条件を設定しながら，様々な材料の，様々な混合の仕方を考える。さらにパッケージをデザインし，実際に作成する。最後に，自分たちが開発したスムージードリンクやパッケージのよさを発表し，もっともよい商品を決める。4～6 時間扱いである。

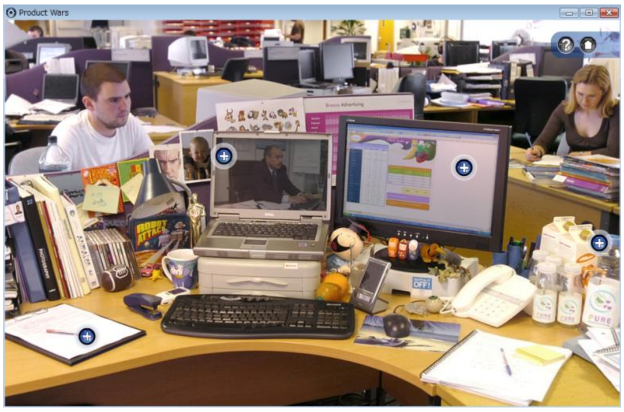


図 3-2　『商品開発競争』のソフトウェアの画面

このケーススタディで特に必要される数学的能力群すなわちプロセス能力を具体的に述べると，次の四つである。（[　] 内は NC の主要プロセスを略記したものである。）

- 調査データを表現し，分析すること ［表現］［分析］
- 自ら設けたカロリーの基準や求めたカロリーを解釈し，評価すること ［解釈と評価］
- 自分たちの考えのよさを，根拠を明確にして伝えること ［コミュニケーションと振り返り］
- 他のグループの考えを理解し評価したり，自分たちの考えを振り返ったりすること ［コミュニケーションと振り返り］

これらは，数学の内容とともに発揮される。例えば，低カロリーでおいしいスムージーにしたいという考えに基づいて，栄養価表を解釈しながら，材料の選択や量に関する仮定をおいた上で，比や割合，単位換算の知識や技能を用いて，カロリーを計算する。その結果を，設定した基準や想定される「味」に照らして評価し，必要であれば修正す

14 2010 年 11 月 15 日～19 日にイングランド実地調査を行い，11 の授業を観察するとともに，生徒や教師に対するインタビュー調査も実施した。詳細は，『Bowland Maths に関するイングランド実地調査　報告書』，http://www.bowlandjapan.org/を参照されたい。

る。基準や仮定がおけてはじめてカロリーの計算で必要な「数学」が意味をなし，その結果は基準や仮定に照らして評価できてはじめて意味をなすのである。このケーススタディで，このようにプロセス能力とともに用いることが想定される数学の内容は，次の通りである（Bowland Charitable Trust，2008）。

＜数と代数＞計算のきまりを使った有理数の演算，小数や分数，百分率，比や割合の考え，近似

＜幾何と測定＞縮尺，単位，複合単位と換算，立体の体積

＜統　計＞データ処理のサイクル

②授業の実際

Newlands Girls School で，Julienne Love 先生による授業を観察した。

はじめに，DVD 付属のビデオクリップをプロジェクターで見せ，スムージー[15]を開発するという解決の目的を確認した。教師の「健康的なスムージーは？」という投げかけに対し，「低カロリー」「バランスがいい」などの意見が出された。その上で，カロリーや栄養価の表をインタラクティブホワイトボード（IWB）に表示し，100 グラムで 48kcal のアプリコットについて，18 グラムで何 kcal かを考えさせた。

100 g	48Kcal		100 g	48 Kcal	
50 g	24	÷100			÷100
25 g	12		1　g	48/100	
18 g		×18			×18
			18 g	48/100×18	

その上で，360g のスムージーを作るように指示をした。生徒はペアで，どのような味になるかを想像しながらバナナ，ストロベリーなどの材料を選び，それぞれの使用量を決め，電卓を使いながら，総カロリーを求めていった。

授業が始まってから 40 分たった段階で，生徒を指名し，使用した材料と量，そのカロリーを口頭で発表させた。教師は，インタラクティブホワイトボードで示した表にその答えを入力（図 3-3，DVD に付属）し，もっと総カロリーが少なくなるようにできないかとコメントした。

Nutrition Facts	calories	protein	fat	carbohydrate
100g	kcal	gram	gram	gram
apple	59	0.19	0.36	15.25
apricot	48	1.4	0.39	11.12
avocado	161	1.98	15.32	7.39
banana	92	1.03	0.48	23.43
blackberry	52	0.72	0.39	12.76
blueberry	56	0.67	0.38	14.13
beetroot	43	1.61	0.17	9.56
carrot	43	1.03	0.19	10.14
date	275	1.97	0.45	73.51
fig	74	0.75	0.3	19.18
grape	71	0.66	0.58	17.77
lemon	20	1.2	0.3	10.7
mango	65	0.51	0.27	17
milk(semi-skimmed)	50	3.33	1.92	4.8
orange	63	1.3	0.3	15.5
peach	43	0.7	0.09	11.1
pear	59	0.39	0.4	15.11
raspberry	49	0.91	0.55	11.57
rhubarb	21	0.9	0.2	4.54
strawberry	30	0.61	0.37	7.02
water	0	0	0	0

96g of Smoothie			
Ingredients	no of grams in my Smoothie	kcals in 100g	kcals in my Smoothie
apple	250	59	147.5
grape	250	71	177.5
water	0	0	0
Total	500	130	325

In 100g	65.00	kcals

You must use 3 ingredients

Your Smoothie must have less than 60 kcals per 100g

図 3-3　『商品開発競争』のスプレッドシート

[15] スムージーとは，細かく切った果物や野菜を凍らせてものを，牛乳やジュース等とともにミキサーにかけて作るシャーベット状の飲み物である。）その上で，さまざまな材料のカロリーや栄養価のデータとワークシートを配布した（ともに DVD に納められているもの

そして，次のように考えた生徒を指名した。

	使用量	kcal/100g	開発商品のカロリー
water	20	0	0
peach	150	43	88.5
rhubarb	120	21	25.2
lemon	70	20	14

生徒から声が挙がり，教師は「よい組み合わせか？」と問いかけた。生徒たちの「No」という答えに対して，すかさず「どうして？」と返し，全体で考えさせた。

最後に，総カロリーだけではなく，他の栄養価も計算した上で，自分のスムージーに名前を付けてくることを宿題とした。

「よく売れる」スムージーをどう捉えるかに応じて，味，カロリー，その他の栄養価のどれを重視するかが決まってくる。すなわち，価値の置き方によって，どのようなスムージーがよいかは変わる。次時には，この価値付けと考案したスムージーとが整合的であるかに焦点が当たることになると考えられる。

3.2.4 『交通事故を減らそう』について

①概要

町議会が，交通事故の死傷者を減らすために，十万ポンドの予算を計上したという設定のもと，過去の交通事故のデータを分析し，どこにどのような対策（信号機を設置する，標識を設置するなど）をするのかを，そのための費用も考慮しながら決め，効果的な安全対策案を作成する。4～5 時間扱いである。

本ケーススタディでは専用のソフトウェアが用意されており，それを用いて分析をする（右図）。具体的には，町の地図上に事故のあった箇所がマークされており，それをクリックすると，被害者の年齢，性別，けがの状況，事故の対象（歩行者，自転車，バイク，車），事故の年月日曜日と時刻，天候（路面状況），制限速度のデータが表示される。130 のデータがあり，それらは年齢や天候等の条件で絞り込みやグラフ表示ができる。

このケーススタディで特に必要されるプロセス能力を具体的に述べると，次の四つである。

・現実の世界の状況を解釈し，適切な変量を捉え，仮説を立てること ［解釈と評価］

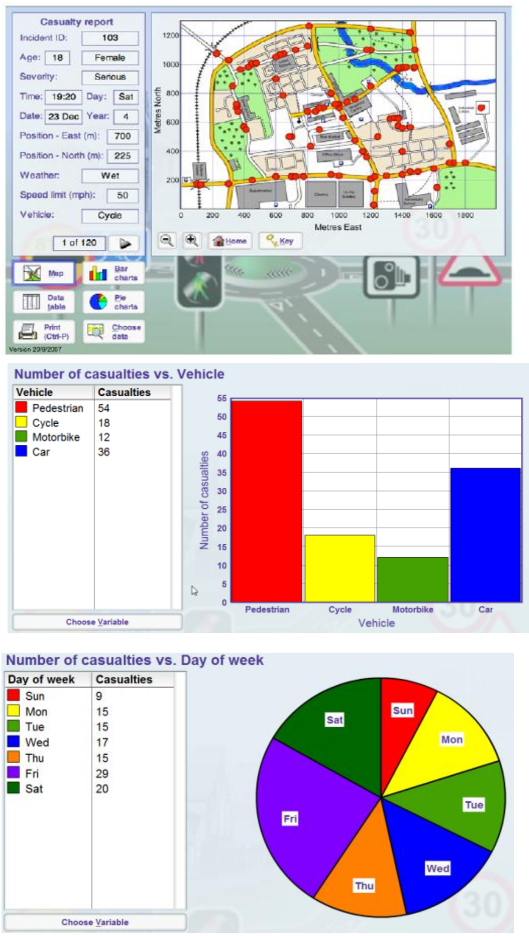


図 3-4　ソフトウェア画面例

・数学的（統計的）手法を用いて分析すること ［表現］［分析］
・根拠を明確にして結論を伝えること ［コミュニケーションと振り返り］
・根拠や結論を理解し評価したり，自分たちの考えを振り返ったりすること ［コミュニケーションと振り返り］

Road Safety campaign	**A poster and leaflet campaign** can be effective when it targets a particular cause of accidents. You will need to describe • the focus of the campaign, • the time of year it will appear, • the type of person it will target. You need to renew the campaign each year for it to continue having an effect.	£20,000 per year
Traffic lights	Traffic lights can control the flow of traffic at junctions or other hazards, stopping some traffic while other traffic is allowed to go.	£30,000 per junction
Mini roundabout	**Mini-roundabouts** are often only marked out with white paint. They are used on roads that have an average speed of 30mph or less. They are often used to reduce speed before a series of road humps.	£10,000
Large roundabout	**Large roundabouts** are used to control the flow of traffic at junctions between major roads.	£40,500
Road narrowings	**Road narrowings** slow traffic down by forcing one stream to give-way to the other. When they are on both sides of the road they are called **chicanes** or **pinch points**.	£10,000

Pelican crossing	**Pelican crossings** control vehicle and pedestrian movements with traffic lights. Pedestrians must wait for the 'green man' before crossing the road	£18,000
Cycle lane	**Cycle lanes** help keep bikes separate from other road users. They can be either on the side of the road or off-road.	£60 per metre
Traffic island and pedestrian refuge	**Traffic islands** in the centre of a road to help reduce vehicle speeds and stop over-taking. If it includes a gap in the middle of the island it is called a **refuge**; it allows pedestrians to cross half the road at a time.	£3,000
Speed camera	Speed cameras automatically photograph the number plates of drivers exceeding the speed limit. Many speeding drivers have been convicted by the photographic evidence.	£25,000
Speed humps	**Speed humps** can only be put on roads with speed limits of 30 mph or less. A series of humps should be about 50 metres apart and have a speed reducing feature at both ends, such as a road narrowing or mini roundabout.	£1,000 per hump
School crossing patrol	A lollipop lady can help to ensure the safety of younger children. It is helpful if approaching traffic is slowed down by other measures.	£5,000 per year

図 3-5 交通安全対策の費用一覧

これらは，数学の内容とともに発揮される。例えば，学校の付近の事故が多いことに着目し，登下校時の事故が多いという仮説を立てる。そして，その仮説を，年齢や発生時刻でデータを層別し，グラフに表し，それを解釈することで検証する。あるいは，先に，データをグラフに表わし，それを解釈し仮説を立てる。この経過を，ペアや小グループ内で報告し話し合いながら，どこにどのような安全対策を講ずるとよいかを考えていく。プロセス能力と統計に関する手法が相まって，解決が進むのである。このケーススタディで，このようにプロセス能力とともに用いることが想定される数学の内容は，次の通りである（Bowland Charitable Trust，2008）。

＜数と代数＞計算のきまりを使った有理数の演算，比や割合の考え
＜幾何と測定＞座標平面における点，直線，図形
＜統　計＞データ処理のサイクル，層別されたデータやされていないデータの表現と分析

②授業の実際

West Park School で，Dominic Hudson 先生による，本ケーススタディの第 3 時の授業を観察した。第 1 時は「事故記録」から地図上の位置を特定する活動を行った。第 2 時は，ソフトに慣れさせることも意図し，「バイク事故はあったか」「○○の周辺ではどのような事故が多いか」「学校が始まる 8～9 時にはどのような事故が多いか」などを

考えさせた。また，最後に，「パブのそばで夜１１時に起きた事故の原因」を推測させた。

本時のはじめに，市長の写真を見せ，決められた予算で交通事故を削減するための方策を考えるという目的を確認した。次に，本時までの内容を簡単に振り返った。その際に，結論のみのものとグラフがあるものを例示し,どちらがよいかと投げかけた。少し，グループで意見交換をさせ，後者の方がエビデンスがありよいということを確認した。さらに，２名の生徒の昨日のワークシートを紹介した。

次に，プリント（図 3-6）を配布し，パソコン（2 人に 1 台）の電源を入れさせた。ホワイトボードに図 3-7 のように書き，本日の目標を明確にしてからペアでの探究に入った。

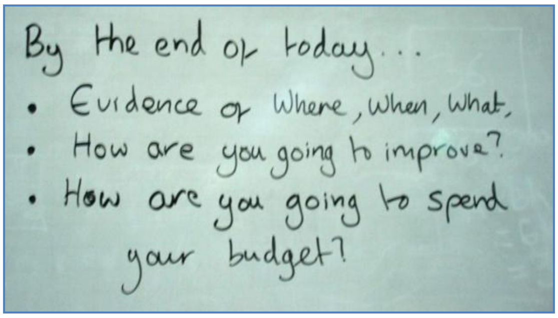


図 3-7　ホワイトボードの記述

A plan for improving road safety

You have a budget of £100,000 to spend on reducing road accidents. Your task is to prepare a plan for the town council answering the following questions:

1. What are main reasons for the road accidents?
   Where are the accidents located?
   Who do they affect most?
   When do they happen?
2. What is your evidence?
   Use maps, graphs and charts to back up your answer.
3. Suggest a possible plan for reducing the number of these road accidents. Use some of the suggestions on sheet S10. Keep within your budget!
4. What would be the total cost of your plan?
5. About how many lives will you save?

Of course, there might be more than one problem, so there is likely to be more than one solution!

Prepare your case carefully, as you will need to present your arguments to the whole class.

Remember:
The best case will be the one that is likely to save the most lives and keep within budget. Try to make your case persuasive and back it up with evidence.

図 3-6　配布されたプリント

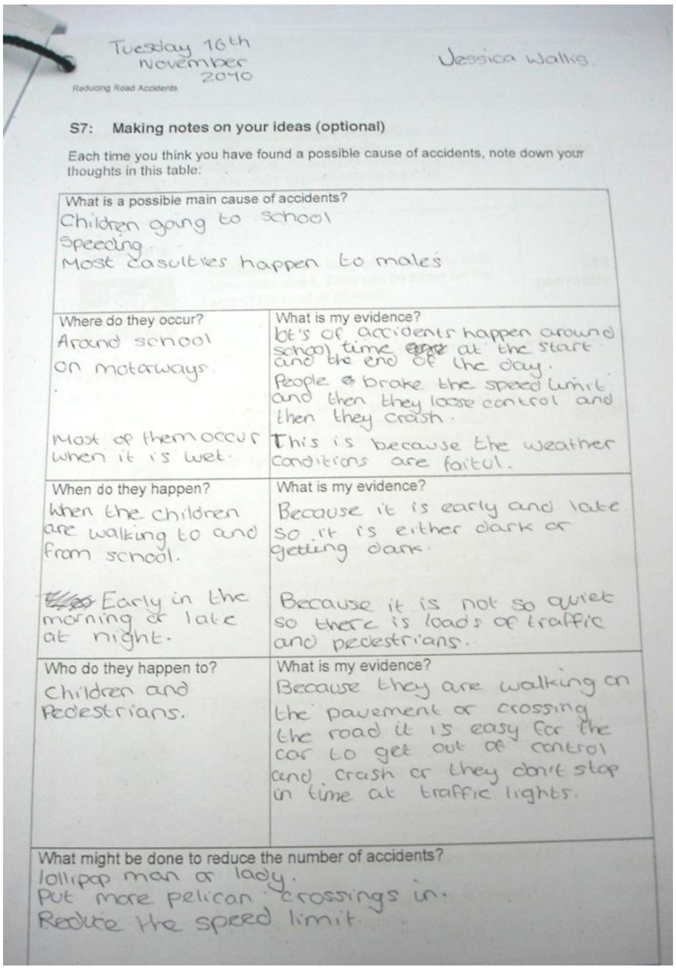
ペアごとに興味深い探究活動が行われていた。例えば，あるグループは，学校の周辺の事故について「事故の対象」別に調べた後，さらにそれぞれの事故の曜日や天気を確認した。さらに,「速度」で絞り込み（図 3-8），速度超過での事故が多いと判断した場所に「Speed humps」（速度制限のための隆起）を設置した。絞り込みながらどこにどのような対策が必要かを考えているペアは全体の 3 分の１程度であった。学校の近くの事故が多いことからスクールバスを導入すればよいと考え，インターネットでスクールバスの金額を調べていたペアも見受けられた。

図 3-8　事故対象者と速度で絞り込み

その間，机間指導をしながら，全体にいくつかの考えを紹介した（ワークシートを投影)。例えば，地図に印をつけ，何を設置するかを示した生徒を取り上げ,「いい考えだね。あとはエビデンスを示すといいね」とコメントした。また，Lollipop lady を１年間１人￡5000 で２人配置するという方策を発

表させ，その位置の書き方を全体で確認した。その位置は座標でいうと(1000，725)の地点である。

残り 20 分の時点で，１つのグループに発表してもらうので，その準備をするよう促した。残り 10 分，１つのグループを指名し発表させた。信号を設置するとし，その位置を画面で示し，理由を述べた。


Tuesday 16th November 2010

Jessica Wallis

Reducing Road Accidents

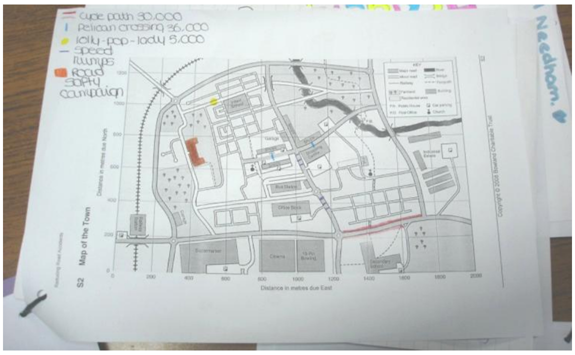
S7: Making notes on your ideas (optional)

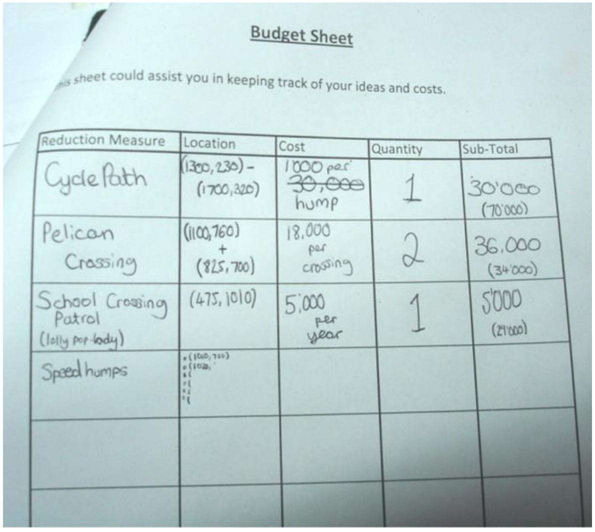
Each time you think you have found a possible cause of accidents, note down your thoughts in this table:

What is a possible main cause of accidents?
Children going to school
Speeding
Most casulties happen to males

Where do they occur?	What is my evidence?
Around school on motorways Most of them occur when it is wet.	lot's of accidents happen around school time ~~and~~ at the start and the end of the day. People ~~&~~ brake the speed limit and then they loose control and then they crash. This is because the weather conditions are faitul.
When do they happen?	**What is my evidence?**
When the children are walking to and from school. Early in the morning or late at night.	Because it is early and late so it is either dark or getting dark. Because it is not so quiet so there is loads of traffic and pedestrians.
Who do they happen to?	**What is my evidence?**
Children and Pedestrians.	Because they are walking on the pavement or crossing the road it is easy for the car to get out of control and crash or they don't stop in time at traffic lights.

What might be done to reduce the number of accidents?
lollipop man or lady.
Put more pelican crossings in.
Reduce the speed limit.




Budget Sheet

...s sheet could assist you in keeping track of your ideas and costs.

Reduction Measure	Location	Cost	Quantity	Sub-Total
Cycle Path	(1300,230) – (1700,320)	1000 per ~~30,000~~ hump	1	30'000 (70'000)
Pelican Crossing	(1100,760) + (825,700)	18,000 per crossing	2	36,000 (34'000)
School Crossing Patrol (lolly pop lady)	(475,1010)	5'000 per year	1	5'000 (29'000)
Speed humps				

図 3-9 ワークシートの記述

どの箇所に，どのような対策をするのかの根拠に焦点が当てられていることがわかる。予算が決まっているので，次時以降では，費用対効果や優先順位も考慮することになると考えられる。

また，この授業を受けていた生徒の中の８名に対して，インタビューを行った。その概要は，以下の通りである。

Q　今日の授業の感想は？
・　おもしろかった。
・　おもしろいけど，それだけじゃなく数学（grid を考える）も学んだ。
・　数学だけじゃなく他のこと（例えばチームワーク　いつもしゃべらない子としゃべるからおもしろい）も学べた。
・　数学じゃないのに数学しているところがおもしろい。

・ 普通の数学は計算などをして，そのうちつまらなくなってくるので持続するのが難しいけどこれはおもしろい。問題設定がおもしろいから。
・ コンピュータを使いながら活動をするのがおもしろい。

Q 今日の問題（交通事故の削減）を解決する中で最も大切だと思ったことは？

・ 予算をオーバーしないようにして，一番いい方法で使わなくてはならないので，バランスを考えることが重要だったし，難しかった。
・ ただしゃべっているだけでなくて，書いて結果を示さなくてはならないこと。
・ チームワーク。いつもは会話をしないような友達ではない人と組んでお互いに話しながらしなければならないこと。
・ 予算のなかで決めなければならないこと。
・ チームワーク。自分がやりたいと友達のやりたいことを合わせたり，調整したりすること。

Q このように答えがひとつではない問題はどう思うか

・ 答えが１つしかないような普通の数学の問題だったら，間違ったらそれで終わりだけれど，この問題は多少間違っても後で修正をしながらできるからいい。
・ １つしか答えがない問題は大して頭を使わないけれど，このようにどこに何があるかわからないような問題は頭を使うからいい。
・ オープンエンドのほうが簡単だと思う。なぜかというと，１つの答えがあるわけではないので，いろいろなやり方で考えて仮説を立てていけばいいし，その局面，局面でやることを選んでいけばいいから。
・ たぶんこの問題に対しての解決方法は 100 万くらいあるだろう。信号機を置く位置をちょっと変えるだけで結果が違ってくる。それを考えることがおもしろい。
・ 違う答えがあるからおもしろい。どこに置くのが一番いいかを判断しなくてはいけない。

Q 学習をしたことが今後役立つと思うか，それはどんなことか

・ 交通関係の仕事について予算にあったことを考えるときに役立つ。
・ 予算管理は他のところでもあるから他のところでも役立つ。
・ 賢くものを選択するというのは考え方だからその考え方が役立つ。
・ ライフスキルとしてこういうことが大事だと思う。

Q 自分にどんな力がついたと思うか？

・ チームワーク。最初はけんかもしたが協力できるようになった。
・ 予算管理に関する感覚が身についた。買い物に行ったときにどのくらい使えばいいかわるようになった。

3.2.5 考察

BM のケーススタディは，3.2.1 に示した公募条件にもあったように，オープンエンドな問題であり，かつ，解決で必要される数学が明らかでない状況において，プロセス能力と複数領域に渡る様々な数学を用いて解決を進めることが意図されている。それらのいくつかは SF 色の強いもの（『ポイント・ゼロ』『エイリアン』『探検家』『アウトブレイク』『宇

宙動物園』）だが，それらを含め，解決者の文脈に対する価値付けが顕著になってくる。例えば，3.2.3 の『商品開発競争』では，「よく売れる」をどう捉え，何を重視するか，3.2.4 の『交通事故を減らそう』では，どこの，どの安全対策を優先するかである。その価値付けのもと，数学を使い，根拠を明確にして判断することが要求されているのである。

そして，ケーススタディでは，ペアやグループで解決することを推奨している。また，その結果を伝え，相互に評価したり，自分たちの解決過程を振り返ったりすることも意図されている。実際，3.2.3，3.2.4 の授業でも，ペアやグループで解決させるとともに，それらの活動を子ども任せにしておくのではなく，教師は，適切なタイミングで，いくつかのグループの考えを全体で取り上げ比較・検討させていた。これは相互作用を創出していると捉えられよう。すなわち，本研究で「相互作用」の軸を設けたことと整合的である。

このような点で，BM のケーススタディは，数学的判断のプロセスを実現する教材開発やそのような教材の指導を考える上できわめて示唆的である。

その一方で，次の二点が気になろう。

第一は，解決に用いる数学の内容が，育成しようとするプロセスに比べて易しすぎるのではないかという点である。これには，指定された数学を用いることと，自ら必要な数学を選択し用いることには質的な違いがあると考え，当該の学年で学ぶ数学よりも易しい数学で解決できるようになっていることがある。また，そもそも同じ内容を学ぶ学年がイギリスの方が日本より遅い傾向があるためにそう感じるということもある。他方で，BM が育成しようとするプロセスを「易しすぎる」と感じないことは，日本の子どものプロセス能力の現状が，学んでいる数学の内容の質に見合っていないことを反映しているとみるべきではないだろうか。

第二は，解が一意に定まらないため，授業が発散して終わるという点である。生徒は「結局，どの考えが正しかったのか」と，言わば消化不良状態となるのでなないかといった心配である。この点について，BM を用いた授業を受けた生徒に対するインタビューでは，「方法がたくさんあるだろうから，それを知りたい」「いろいろな答えがあるからおもしろい」等の肯定的な答えが返ってきた。この要因には，教師にも生徒にも，プロセスが学習対象であることを意識づける方策がとられていることが挙げられる。具体的には，ペアや小グループでの協同的な問題解決，自分たちの考えを必ずノートやプリントに書かせること，根拠を明確にしてプレゼンテーションをさせること，プロセスに焦点化しそれぞれの考えを相互評価させたり，振り返りシートに記入させたりすることなどである。そして，言うまでもなく，このような活動に生徒が熱心に取り組めるのは，ケーススタディが生徒にとって魅力的だからであり，かつ，プロセスを強調した設計になっているからである。

次節では，このようなケーススタディを指導するための教師教育について見てみることにする。

3.3　教師教育モジュールについて

Bowland Maths（以下 BM）では，これまでに見てきたように生徒の「プロセス能力」の育成をねらいとする探究的な教材「ケーススタディ」を開発してきた。これら教材を扱う教師側に指導力が備わっていなくては効果が十分に発揮できないことから,「教師教育モジュール」も開発されている。

教師教育モジュールは，下記 5 つのモジュールから形成される。

① ケーススタディと数学
② 定式化されていない問題を授業で扱う
③ 授業での協働作業の進め方
④ ICT：リソースの効果的な使用
⑤ 発問と推論

各モジュールは「準備」「実践」「フォローアップ」の 3 つのセッションで構成されている。「準備」は BM の教材や活動内容，他の教師が行った授業実践のビデオなどを見て自身の授業の準備をする。「実践」は「準備」した教材を用いて実際に授業を行う。「フォローアップ」は,「実践」された授業について観察していた教師も含めてお互いに意見を出し合い，研究協議を行う。

モジュールは 5 つあるが，全てを網羅しなくてはならないとはされておらず，それぞれを独立して扱うことができるし，①から⑤までの順序も特に縛りがあるわけではない。各モジュールの特徴について以下，順に見ていく。

3.3.1 モジュール１：ケーススタディと数学

ここでの主題は「各事例のどこに数学があるのか？」となっている。BM で扱う教材は，実生活で直面する問題のように，数学の問題として定式化されておらず，そのため正答も 1 つではなく，解法が何通りも考えられる。生徒は，数学を用いて問題状況を表現し，分析し，解決の結果を解釈し，評価し，他者にそれを伝え振り返ることが求められる。このモジュールでは，教師としていかに生徒にこのようなプロセス能力を育成するかを扱う。

「準備」,「実践」,「フォローアップ」の 3 つのセッションの概要は次のようになっている。どのモジュールにも共通だが, 各セッションに要する時間は 1 時間と設定されている。

表 3-1：モジュール１の各セッションの内容

セッション	内容
準備	・問題を確認：どこに数学があるか？ ・KS3 のキープロセスを確認 ・教育的示唆についての議論 ・授業観察 ・BD の問題を用いての授業計画
実践	・状況を生徒に提示し，問題を特定させる

	・問題を簡略化し表現させる ・生徒の表現を概観する ・問題を分析し解決する ・異なるアプローチ生徒同士で話し合わせる ・生徒が用いたキープロセスについておさらいする
フォローアップ	・授業とどのように数学が表れてきたかを振り返る ・数学的な技法をいつ提示すればよいか ・ケーススタディを指導配列の中に盛り込む ・テストについて

① モジュール１「準備」の内容

「ホンジュラスでのペットボトルを使った学校建設」が例として紹介されている。生徒は数学の授業と現実世界とのつながりを感じにくく，学校外では学んだことを使わない傾向にある。そこでこのモジュールでは，現実世界の文脈に沿った場面を提示し，そこから数学が生じてくるということを感じさせる。

図 3-10　ホンジュラスでのペットボトルを使った学校建設の写真

次にここで行う問題解決プロセスやモデリングサイクルについて考察し，KS3 のキープロセスとの関連についてまとめる。また，この教材がねらいとする生徒に育成すべきプロセス能力など教育示唆について検討を行う。これら一連の検討を行った後に実際にこの教材で授業を行った教師の授業ビデオを鑑賞し，キープロセスがどのように授業に表れているかを分析する。

分析の観点についても以下のように具体的に提示されている。

○状況を簡略化し表現することについて

・どんな問題を設定していたか？

・どんな簡略化や表現をしていたか？

・情報や方法，ツールについてどんな選択をしていたか？

○生徒が作ったモデルについての分析と解決

・どんな変数を考慮していたか？

・どんな情報を集めたり推測していたか？

・どんな関係性をまとめていたか？

・どんな計算をしていたか？

〇結果の解釈と評価について

・その状況から何を学んだか？

・彼らのまとめは妥当か？

〇発見したことに関するコミュニケーションと振り返り

・自分たちの分析をどう説明していたか？

・他の問題とのつながりをどのように見付けていたか？

以上の分析を経て，実際に自分が行う授業の計画を立てる。授業を組み立てる際の視点も次のように提示されている。

・生徒への状況提示の仕方

・モデリングサイクルの考えの導入の仕方

・必要とされる情報や授業の扱い方

・「どうしてこれを数学の授業で行うのか」の問いにどう答えるのか

・数学的プロセスについて生徒がよく理解できるような授業のまとめ方

② モジュール１「実践」の内容

実際に授業実践を行うセッションであるためここでは割愛する。以後のモジュールにおいても同様に割愛する。

③ モジュール１「フォローアップ」の内容

自身の授業を振り返り，キープロセスの中で表れてきたものを押さえる。以下のような観点が提示されている。

・どんな数学的な問いが設定されたか？

・生徒は様々な数学的表現を用いたか？

・生徒はどんな関係性を見出したか？

・生徒はどんな計算をしていたか？その意味はわかっていたか？

・生徒は自分たちの結果について効果的に伝えることはできていたか？

・生徒はこの授業と通常の数学の授業との違いを感じていたか？

・生徒は学んだ数学が不慣れな状況でも適用できるということを理解し始めたか？

これらの検討の後に，数学的な技法の提示の仕方についての検討が行われる。その課題で必要になるであろう数学的技法を生徒が習得できていなければならないのは明らかである。とはいえ，問題状況を提示する前に当該の数学的技法について指導を行ってしまっては，課題はただの練習問題となってしまう。生徒が解決に取り組む中，あるいは取り組みが終わった後に数学的技法を提示しなくてはならないが，そのタイミングには検討を要するものである。

BM のケーススタディをトピック的に扱うのではなく，通常の指導課程に組み込むことは重要であるため，

図 3-11　付属のビデオクリップより

その点についての検討も行う。また，国の行う試験での成績など評価に関して BM のケーススタディでの学習が及ぼす効果についても検討を行う。

3.3.2 モジュール２：定式化されていない問題を授業で扱う

ここでの主題は「距離を置いて様子を見るか，生徒に指示を出すべきか」となっている。一般に数学の授業では，問題を解くために必要な情報や数学的な知識・技法について生徒に提示されてしまう。だが，教室を離れた実生活において生徒が数学を活用できるようになるためには，定式化されていない問題場面に直面し，どの数学的な技法を用いるべきか選択する機会を与える必要がある。

表 3-2　モジュール２の各セッションの内容

セッション	内容
準備	・定式化された問題に対する批判と改良 ・定式化された問題とそうでない問題の比較 ・定式化されていない問題を扱った教師の観察 ・教育的示唆についての議論 ・BD の問題を用いての授業計画
実践	・教室での問題提示 ・生徒による問題解決 ・異なったアプローチの共有 ・問題についてのさらなる検討
フォローアップ	・授業の報告と振り返り ・教師の介入の様子についての観察 ・支援の仕方についての検討 ・微妙な問題点について各自どう扱うか議論 ・今後の授業に向けて計画

①モジュール２「準備」の内容

ここではまず，一般的な数学の授業でよく用いられている定式化された問題に対する検討を行う。BM では 3 つの題材を例，それぞれ定式化された問題として教材化した場合と定式化されていない問題として教材化した場合を提示対比させている。ここでは 3 つの題材のうちの 1 つ，「18 個入りのお菓子箱のデザイン」を取り上げる。

> デザイン会社に勤めているあなたは 18 個入りのミントのお菓子箱のデザインを依頼されました。ミントは直径 2cm で暑さ 1cm です。箱は A4 サイズの厚紙 1 枚からできるだけ小さく切り出さなくてはなりません。
>
> 下の格子点を使って，箱をどのように折って接着するのかを示してください。確認のために箱を作ってみてください。

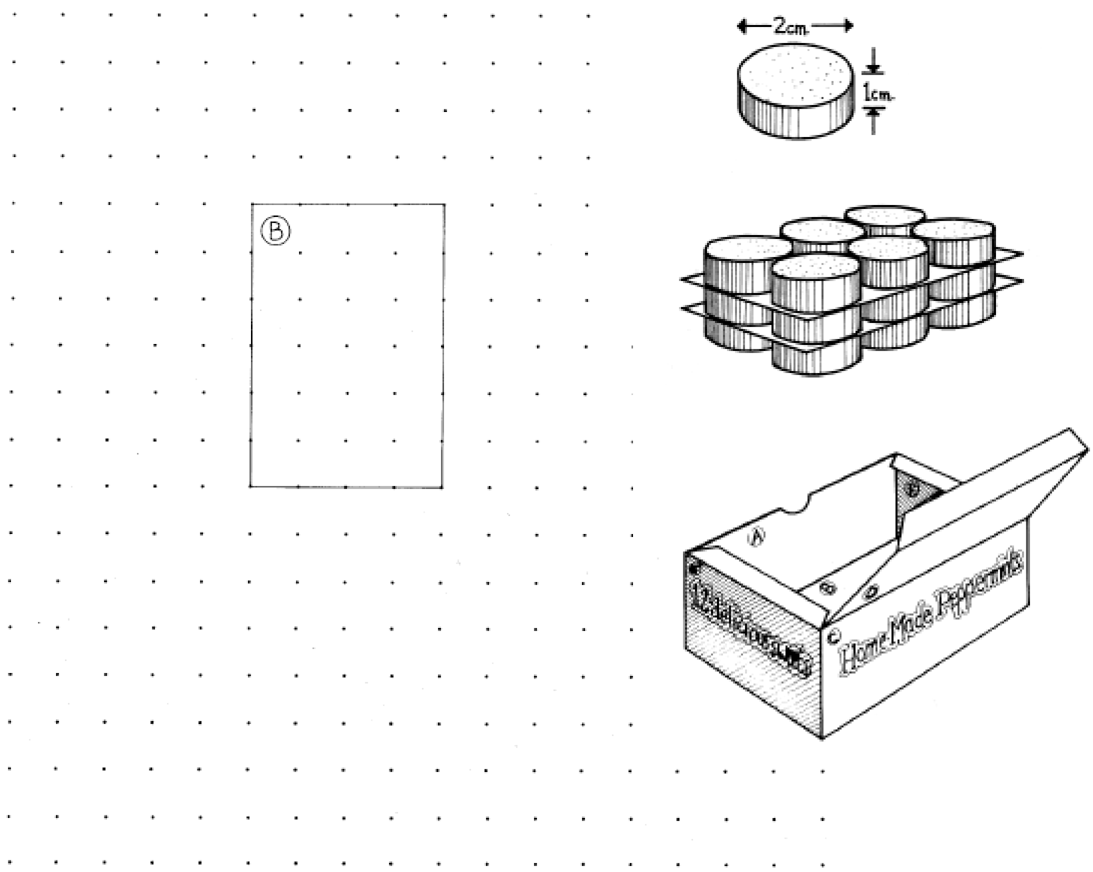
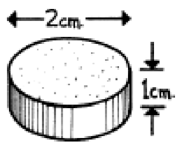


図 3-12　「18 個入りのお菓子箱のデザイン」定式化されたバージョン

このような定式化された問題は数学の授業に一般的によく見られるものである。出来上がりの箱の各面にAからFまでの記号が当ててあることや格子点を用いて展開図を考えることなどは，本来であればこの問題に取り組む解決者が工夫して行うことであるはずで，生徒が自分で考えなくてはならないことである。問題が提示された時点ですでにこうした工夫がなされてしまっていては,生徒がこのような工夫の仕方を学ぶ機会を奪ってしまう。

デザイン会社に勤めているあなたは 18 個入りのミントのお菓子箱のデザインを依頼されました。ミントは直径 2cm で暑さ 1cm です。箱は A4 サイズの厚紙 1 枚からできるだけ小さく切り出さなくてはなりません。



箱として採用可能なデザインを 2 つ考えてください。それらを比べてどちらが優れているか理由も合わせて説明してください。その箱を作ってみてください。

図 3-13　「18 個入りのお菓子箱のデザイン」定式化されていないバージョン

定式化されていないバージョンではより現実に遭遇するような場面と問題が設定されている。注意しなければいけない点は以下の通りである。

・問題はより難しくなっている

・生徒はどこから手をつけていいかわからないかもしれない
・あまり早く教師が声かけをしてしまっては，生徒は自分で考えることせず指示を聞くだけになってしまう
・生徒様々なアプローチや解決を考え出す
・生徒には異なるアプローチを取ることや答えを出すことが許されるという安心感が必要である

これらの比較検討を行った後に，他の教師が行った授業ビデオを観察し，授業展開や教師の支援の仕方,子どもが何を学んだかなどを分析する。その後に自身の授業を計画する。

② モジュール２「フォローアップ」の内容
自身が行った授業について振り返りを行う。以下のような観点が提示されている。

・今回のような授業での生徒の反応はどうだったか？自信をもって取り組んでいたか？支援を必要としていたか？それはどんな支援だったか？なぜ支援を必要としていたか？
・どのような支援をしなければいけないと感じたか？それはなぜか？支援し過ぎ，あるいは足らな過ぎということはなかったか？
・生徒はどんな方略を用いていたか？生徒の取り組みの中で 2，3 種類について共有せよ
・この授業で生徒は何を学んだと考えるか？

別の教師が行った授業ビデオと自信の授業とを比較することも扱われている。例えば「授業ビデオの中で教師がしている発問とあなたがした発問を比較せよ」などである。その他にも，不慣れな問題に取り組む生徒は不安になりやすいため，どのように安心感を与えたかや，例えば BMI などのような題材を扱う際には，体型や体重を気にしている生徒がいないのかどうかなどの問題点についても考察している。

3.3.3　モジュール３：授業での協働作業の進め方

ここでの主題は「ただの会話ではなく，議論をさせるにはどうしたらいいのか？」となっている。生徒が互いの推論を交わすような数学的議論は優れた学習効果を上げることはすでに十分にわかっている。このモジュールでは次のことを扱う。
・生徒同士の効果的な議論の特徴について考察
・生徒同士の議論を促進するためのテクニックの検討
・生徒同士の議論を取り回すための教師の役割についての議論

表 3-3　モジュール３の各セッションの内容

セッション	内容
準備	・数学的議論の経験 ・議論に関する振り返り ・議論のある授業についての観察

	・指導への示唆についての議論 ・BD の問題を用いての授業計画
実践	・問題を提示し生徒自身に考えさせる ・ペアになってアイデアを共有する ・よい方法について議論する ・他の方法について考える ・解決方法について共有する
フォローアップ	・授業についての報告と振り返り ・協働作業をしている際の教師の役割についての検討 ・コミュニケーションが苦手な生徒のための支援策 ・今後の授業に向けて計画

① モジュール３「準備」の内容

どのような話し合いが生徒の学習の助けになるのかその特徴を検討してもらう必要があるのだが，このセッションではまず教師自身に数学的議論を体験してもらうところから始める。例えば「サッカー場に気持ち良く立っていられるのは何人か？」のような問題について小グループで話し合ってもらう。

次にその話し合いを振り返ることで数学的議論について検討を行う。その際の観点は以下のように示されている。

・議論の中であなたやグループのメンバーはどんな役割を果たしていたか？
・あなたが体験した議論の中で次のような特徴は見られたか？協力し合えたか？相互関係はできていたか？積み上がって行ったか？助けになっていたか？目的的だったか？
・あなたの話し合いは，**討論的**，**積立的**，**探究的**などと表現することはできるか？
・この経験からあなたは数学的に何を学んだか？
・どのような概念，スキル，問題解決方略を見に付けることができたか？

これらの検討の後に授業ビデオを観察し，実際の授業の中で教師が数学的議論を展開しているかなどを分析する。数学的議論というものは生徒にとってなじみのあるものではないため，自然と生産的な議論を行うことができるわけではない。生徒によってはみんなの前で話すことを恥ずかしがったり嫌がったりすることもあるため，議論の仕方というものを教えていく必要がある。自身の学級で議論を促進するためにどんなルールを作るのか検討し，授業の計画を立てる。


図 3-14　付属のビデオクリップより

② モジュール３「フォローアップ」の内容

実際に行った授業について振り返りを行う。生徒が議論を行っているときに，教師がその内容を把握することは難しい。いつどのように生徒の議論に介入すればいいのかを考え

る必要がある。教師がうまく介入することで生徒同士の議論の質と内容はかなり向上する。次のような観点が示されている。

・生徒が話し合っているときあなたは何をするのか？
・介入するかそのままにしておくのかどうやって決めるのか？
・どんな言葉や行動が助けになるのか？また，助けにならないものはどんなものか？
・生徒の議論が脱線したときあなたはすぐに軌道修正をかけますか？それともがまんして様子を見ますか？またそれはなぜですか？

また，話し合いが苦手な生徒のためには，問題解決に取り組むよりも話すこと，聞くことの練習から始めた方がよいとされており，その点についての支援なども検討を行う。これを具体的に示した授業ビデオも用意されており，観察し分析を行うことができる。これらのことを総合して，今後のための計画を立てるのである。

3.3.4　モジュール４：ICT:リソースの効果的な使用

ここでの主題は「遊ばせるのではなく，考えさせるにはどうしたらいいのか？」となっている。このモジュールでは，生徒の問題解決や数学学習を助けとなる ICT をいかに効果的に使用するかについて扱う。ここでは，コンピュータを「探究を行うマイクロワールド」，「思考のツール」，「教育的なツール」という側面から比較対照する。

表 3-4 モジュール４の各セッションの内容

セッション	内容
準備	・「マイクロワールド」としての ICT 利用について探究 ・自身の学校での ICT 利用について振り返り ・ICT を使用した授業観察 ・ICT を使用した授業計画
実践	・教室へのマイクロワールドの導入 ・生徒によるマイクロワールドの探究と問題作り ・各自見たことを述べ，問題を共有する ・生徒による問題解決 ・生徒の報告と発見したことの共有
フォローアップ	・「スピロ長方形」か「ダンスの動き」について振り返り ・「思考ツール」としての ICT 利用についての振り返り：「雑誌の売り上げ」 ・「雑誌の売り上げ」を用いた教師の観察 ・数学学習の新しいプログラムへの ICT の関連付け ・ケーススタディにおける ICT 利用についての確認 ・思考を刺激する他のリソースに関する検討（任意）

① モジュール４「準備」の内容

ここではまず，数学の授業におけるコンピュータの利用目的について，次の 3 点から考察する。

・探究する場としての「マイクロワールド」
・包括的な「思考ツール」
・教授のためのツール

このモジュールでの準備，実践，フォローアップを通して，数学の授業において ICT の果たす役割や重要性について検討を進めていく。

ケーススタディにおいては，「マイクロワールド」としてのコンピュータ利用の事例が多い。ここでいう「マイクロワールド」とは，生徒が自由に探究することができるソフトウェアの中に実現された現実的／仮想的状況のことである。ここでは，「スピロ長方形」などを実際に体験してもらう。

その上で次のような視点でディスカッションを行う。

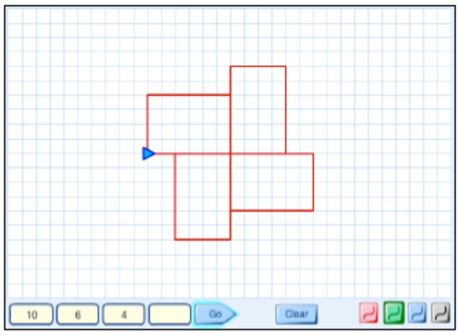


図 3-15　マイクロワールド「スピロ長方形」

・どんな数学的プロセスやスキルが盛り込まれていたか？
・コンピュータはその活動をする上でどう役立ったか？
・他にどんな「マイクロワールド」での活動を学校で活用できそうか？

さらに前述の 3 点からなるコンピュータの利用目的のそれぞれの特徴や違いについて考察し，ほかの教師が行った授業ビデオを観察し，授業展開や教師の支援の仕方，コンピュータを使わずに同じ内容を扱うにはどうしたらよいかなど検討を行う。その検討の後に自分の行う授業の計画を立てる。その際の視点は次のように提案されている。

・その活動の生徒への提示の仕方について，一番いい方法は？
・生徒が「遊んでいる」状態から，きちんと取り組み，自分たちの考えを記録するように進展するのをどのように保証しますか？
・いつ，どのように生徒たちに考えや方略を共有させますか？

② モジュール 4 「フォローアップ」の内容

自身が行った授業について振り返りを行う。以下のような観点が提示されている。

・どの問題を生徒は選んだか？
・生徒にとって数学的にどんな難しさがあったか？
・コンピュータ利用に関してどんな難しさがあったか？
・生徒が試行錯誤しているところから抜け出すためにどんな支援をしたか？
・生徒はどんな記録を取っていたか？
・生徒は数学について何を学んだか？
・生徒はコンピュータ利用について何を学んだか？

さらに「雑誌の売り上げ」におけるコンピュータの利用の仕方に関する考察や授業ビデオ観察などを通して，「思考ツール」としてのコンピュータ利用についても検討を行う。

また，ICT 利用をする際のチェックリストも提示されており，研修後に実践していく上での指標として役立てることができる。

・適切な ICT リソースを用いること
・授業を実施する部屋を準備すること
・ICT リソースを事前に試してみること
・結果の出力の形について検討しておくこと
・授業そのものについて検討しておくこと

図 3-16　付属のビデオクリップより

3.3.5　モジュール５：発問と推論

ここでの主題は「生徒に思考，推論，説明をさせるにはどうしたらいいのか？」となっている。このモジュールでは次のことに関して検討する。

・生徒を引き付け，思考や推論をさせるような発問の特徴
・生徒が間違えることを怖がらず，広くよく考えられた答えを出せるようにするための方法
・「声に出して考える」推論方法の価値

表 3-5　モジュール５の各セッションの内容

セッション	内容
準備	・なぜ生徒に問いかけるのか考える ・効果的とそうでない発問の違い ・授業観察 ・効果的な発問を意図した授業計画
実践	・問題を提示し個別に考える時間を与える ・黒板にこの時点での生徒のアイデアを出す ・生徒が問題に取り組む ・アプローチの仕方について教室全体で議論する ・同じ問題に対してもう一度取り組む ・生徒の推論について教室全体で報告する
フォローアップ	・授業の報告と振り返り ・「声に出して考え」ながら問題を解く ・他の教師が「声に出して考える」ところを見る ・発問と「声に出して考える」ことを取り入れた今後の授業計画

① モジュール５「準備」の内容

教師が質問をし，生徒がそれに答えるというのはおそらく最もよく見られる教師―生徒間のやり取りだろう。教師が質問をする意図は，生徒の注意を引くため，理解状況を把握

するためなど様々ある。ただ生徒は教師の質問の意図をつかめないことも多く，考えについて説明するというよりも「正答」を予測し答えようとすることもよくある。ここでは，生徒の考えや推論，説明を促すような発問の仕方について検討を行う。

まず発問にはどんな種類があるのかを考えてみよう。

・発問にはどんなタイプのものがあるか？
・あなたの発問はどんな目的のためになるか？
・どのタイプの発問を最も多く使っているか？

その上で，効果的な発問，そうでない発問についての比較検討，授業ビデオの観察を通しての実践的考察を行い，自身の授業プランの作成を行う。

その際の観点としては次のものが示されている。

・教室とリソースをどのようにまとめますか？
・発問を投げかける時間帯をどのように導入しますか？
・どんな基盤ルールを設定しますか？
・初めに投げかける発問は何ですか？
・生徒が答えるまでの時間はどの程度与えますか？
・ポイントとなる点に再度焦点化したり，別の方略について議論を促すために仲介に入る必要はありますか？
・十分な議論が行われているとき，あるいは授業のまとめに向けてどんな発問をしますか？

② モジュール５「フォローアップ」の内容

自身が行った授業について振り返りを行う。以下のような観点が提示されている。

・どんな方略を用いたか？
・どんな発問が生徒の考えを深めたり，推論させたりしたように思えたか？またそれはなぜか？
・どんな発問は機能しなかったか？それはなぜか？

問題解決の過程は頭の中で行われるため外からは観察しにくい。そのため生徒が行う問題解決の内容を把握することは困難であるが，適切な発問を投げかけ授業を運営していくためには必要なことである。そこで「声に出して考える」活動を取り入れてみる。

・イギリスに歯医者は何人いるか？

この問題について，「声に出して考え」ながら取り組んでみよう。誰かが教師役になって，「声に出して考え」ながら，この問題に少しずつ取り組んでいく。他の人は生徒役になって，適宜補助に回る。

・まず何をすべきか？
・ここで役に立ちそうな表現方法は何か？
・この手順をどう確認したらいいか？

・どこで間違えたか？
・正しい方向に向いているか？

さらに他の教師たちが行っている「声に出して考える」様子を観察し，議論を行い，自身がこれから行っていく授業に向けて計画を立てていく。

3.3.6 本節のまとめ

ここでは BM が提案している教師教育モジュールの概要についてまとめた。BM のコンセプトが 5 つのモジュールという形でまとめられ，教師にわかりやすく伝えられるような工夫や配慮が随所に見られた。研修内容をこのようにプログラム化することで普及は容易になるとともに，時間や場所，指導者が違っても研修の質が保たれるというのは大きな利点だろう。また，各モジュールで提案されている観点だけを見ても，教師が日々の授業の中で自身に問いかけるに値するものが多くあり，十分に役立てられるだろう。

3.4 評価課題について

BM は，「ケーススタディ」，「教師教育モジュール」，「評価課題」の三部構成となっている。これは，開発した教材を授業で扱うための指導力と，どのようにプロセス能力が伸長したかを測定する評価課題がなくては，開発した教材はいわば「絵に描いた餅」に過ぎないと考えられているからである。

「評価課題」は， 35 題用意されており，それらの問題場面はケーススタディとは独立している。課題ごとに，NC の主要プロセスである「表現」，「分析」，「解釈と評価」，「コミュニケーションと振り返り」の四つの観点で，おおむね 4 段階のルーブリック（評価基準表）が付いている。また，いくつかの生徒の記述例やそれに対するコメント例も示されている。このような評価方法は，日本でも研究や実践が進められている「パフォーマンス評価」（例えば，松下，2007；西岡・田中，2009）と同様である。BM では，これらの評価課題に対して，ケーススタディと同様のアプローチをさせることに特徴がある。すなわち，ペアやグループで解決に当たらせたり，教師が適宜発問もしたりしていくことを奨励している。課題を配布し個別に取り組ませるのではなく，プロセス能力が発揮されるべき現実の状況に近い形で評価するというスタンスなのである。

次ページに，評価課題『猫と子猫』とそのルーブリック等を示す。この課題に取り組む前に，生徒に猫の去勢に関するビデオクリップを見せることが推奨されている。その上で，野良猫が増えることを危惧する団体からの依頼という設定で，18 ヶ月で 2000 匹になるというのが妥当かを考えさせる。猫の妊娠に関する情報をもとに適切な仮定をおくことや，それに基づいて 18 ヶ月後の子孫数を予測する方法を見いだすこと，その過程を適切に説得力のある方法で伝えること，おいた仮定を意識しながら解決を振り返ることなどのプロセス能力を，生徒の記述をもとに評価する。

BM では，このような評価課題を用いて，プロセス能力の形成的評価を行い，中・長期的に，プロセス能力の育成を図っている。ただし，どのケーススタディの後にどの評価課題を用いるとよいかや，評価課題間の順序性は示されていなく，その選択は教師に委ねられている。

（資料 1）『猫と子猫』

猫はたし算ができないが，かけ算はできる！

この雌猫は，ちょうど18ヶ月で，2000匹の子孫を持つことができる。

あなたの猫は子猫を持つことができないようになっていますか。

これは，野良猫の世話をしている団体が作成したポスターである。

この団体は，あなたに，ポスター印刷する前に，この子孫の数が現実的かどうかをチェックしてほしいと依頼してきた。

あなたは，次の猫に関する情報のいくつかを利用することになるだろう。

妊娠期間は
約２ヶ月

ふつう，一度に
４～６匹
の子猫が生まれる

雌猫は，生後
約４ヶ月
で，最初の妊娠をする

１匹の雌猫が１年間に
妊娠する回数は平均３回

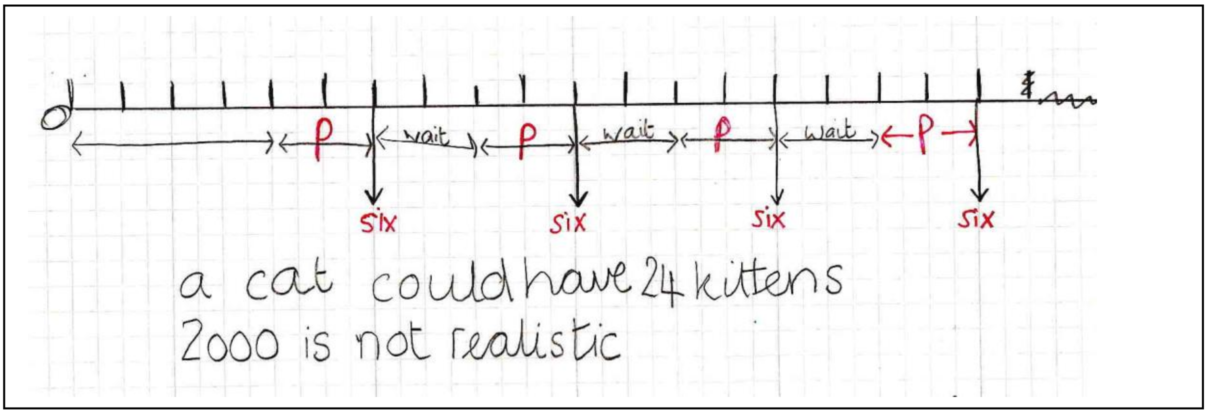
雌猫が子猫を
産めなくなる年数は
平均１０年

進歩

表　現	分　析	解釈と評価	コミュニケーションと振り返り
図と時系列の数直線を選ぶ	数えること，計算と正確さ	仮定をおきながら，問題を関係づける	方法，推論，結論の明快さ
簡単な図をかく，あるいは，鍵となる出来事を時系列に数直線にかく。生徒 A・B	それぞれの猫が１匹ずつ産むとして，子猫の数を求めている。　生徒 A・B	もとの問題へ発見を関係づけている。例えば，2000 匹の子孫は現実的かそうではないか。生徒 A・B	最初の猫がどれで，それぞれの雌猫から何匹の子猫が生まれるかを伝えることが可能な方法で，考え方を表している。　生徒 A・B・C
簡単な図をかき，かけ算が適切な道具であることを示している。あるいは，出来事を時系列に数直線にかいている。そして，最初の猫の子以降を考えている。　生徒 C	それぞれの猫が１匹ずつ産むとして，かけ算で子猫の数を求め，それらの子孫をすべて数え上げる必要があることを認識している。　生徒 C	１匹の雌猫あたりの子猫の数についての仮定を明確にしている。例えば，それぞれの雌猫から６匹の子猫が生まれる。	他者が推論を追うことができるように，自分たちの方法を示している。
すべての子孫を示していなくても，かけ算と累乗の双方の方法を表している。	妊娠可能な期間の中で，ほとんどの猫は１匹以上の子猫を産むことを認識している。	１匹の雌猫あたりの子猫の数についての仮定を限定している。例えば，私は一度に産まれる子猫は最大である６とした。	最初から最後まではっきりと，効果的で簡潔なコミュニケーションをし，（部分的な）解決を組み立てている。
初めの子猫とすべてのその子孫を，かけ算と累乗の双方で表す，効果的な方法を選んでいる。生徒 D	効果的な方法を使って，広範囲にわたる要因を考慮した，説得力のある解決に向かっている。　生徒 D	仮定を一層明確にしている。例えば，１匹も猫が死なない，あるいは，肉体的に可能になればすぐに妊娠する。生徒 D	振り返りの証拠－例えば，１匹の雌猫につき生まれる子猫の数が結果に大きく影響すること，とともに，はっきりと，効果的で簡潔なコミュニケーションをする。生徒 D

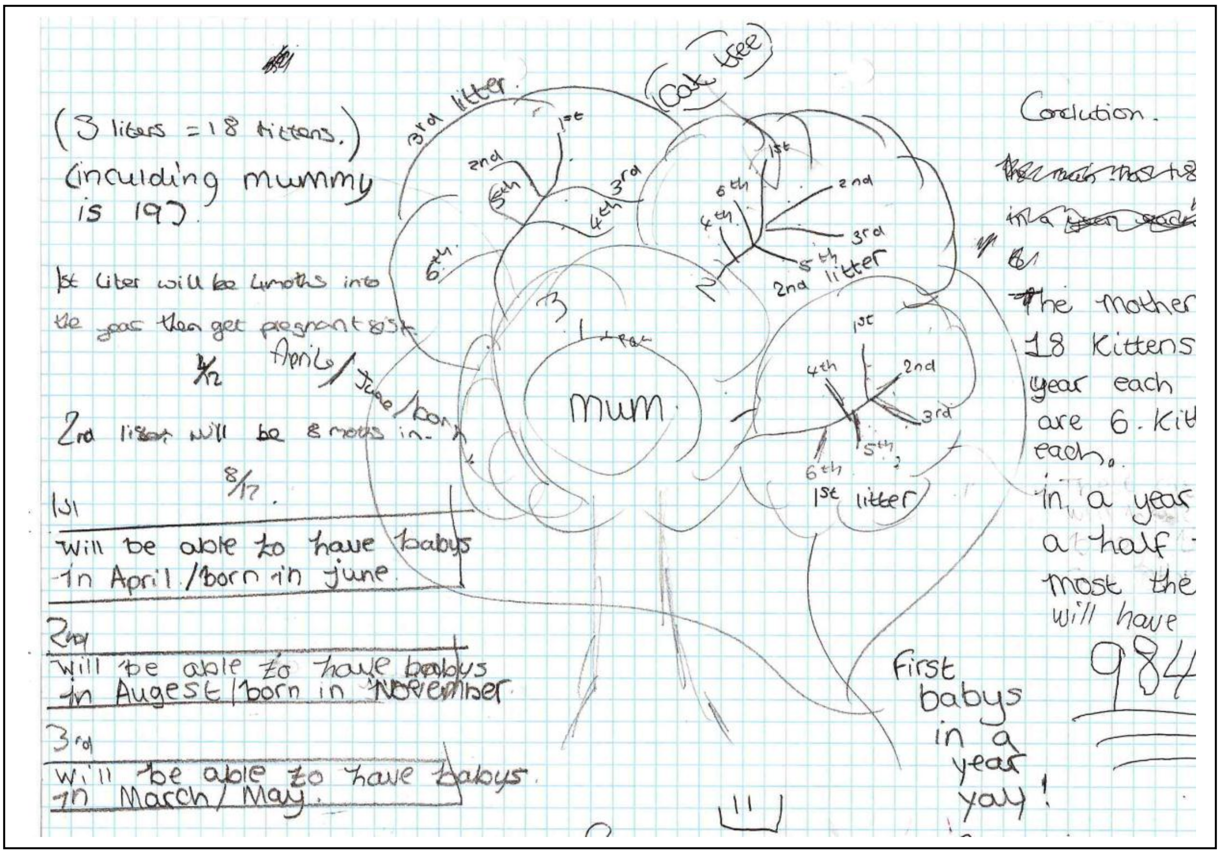
反応例

生徒 A



簡単な時系列の数直線に月がかいていない。しかし，18 に分割されており，出来事は理解している。最初の猫から 1 匹しか子猫が生まれてないが。彼女は，1 年間で 24 匹の子猫が生まれると求めた。だから 4 ヶ月で 6 匹加えるというパターンを認識し，適用した。

生徒 B



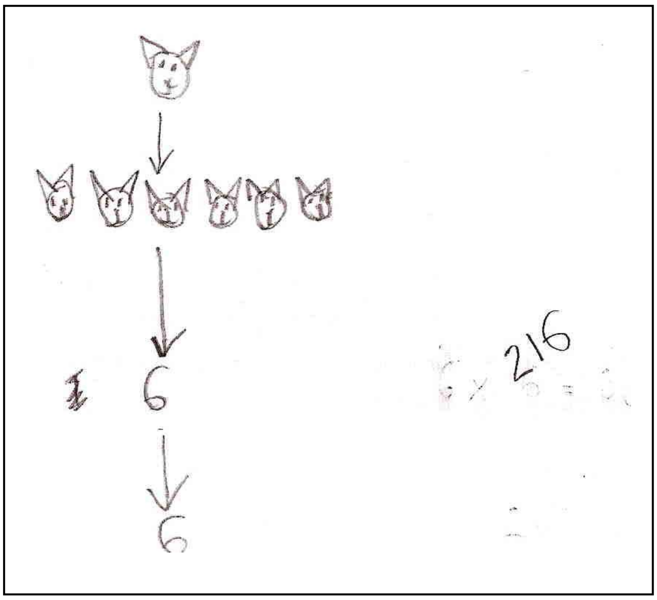
「猫の木（かけ算の方法)」を使っており，(誤っているが）累乗でコントロールしようとしている。彼女は 9846 の値について説明していない。また，理由についてもかかれていない。彼女は，1 匹の母体あたりの子猫の数についてははっきりかいている。彼女のコミュニケーションは理由がはっきりしている。

生徒A・Bへのコメント

- *あなたが問題を解くとき，異なったすべての方向から考え，振り返ったり，チェックすることを覚えておきましょう。*
- *最初の母体で６匹の子猫を生み。それぞれもまた生んでいく・・・ということを考えてみなさい。*

双方の生徒とも実生活の筋書きの中で数学を適用するもっと多くの機会を必要としている。それは，解決の幅があり，いくつかの現実的なものである。そしてそれらは，どれが最適で，なぜそれがよいかなどを問うものである。これもまた複雑な問題にアプローチする方法の理解を促進させることに役立つであろう。

生徒 C



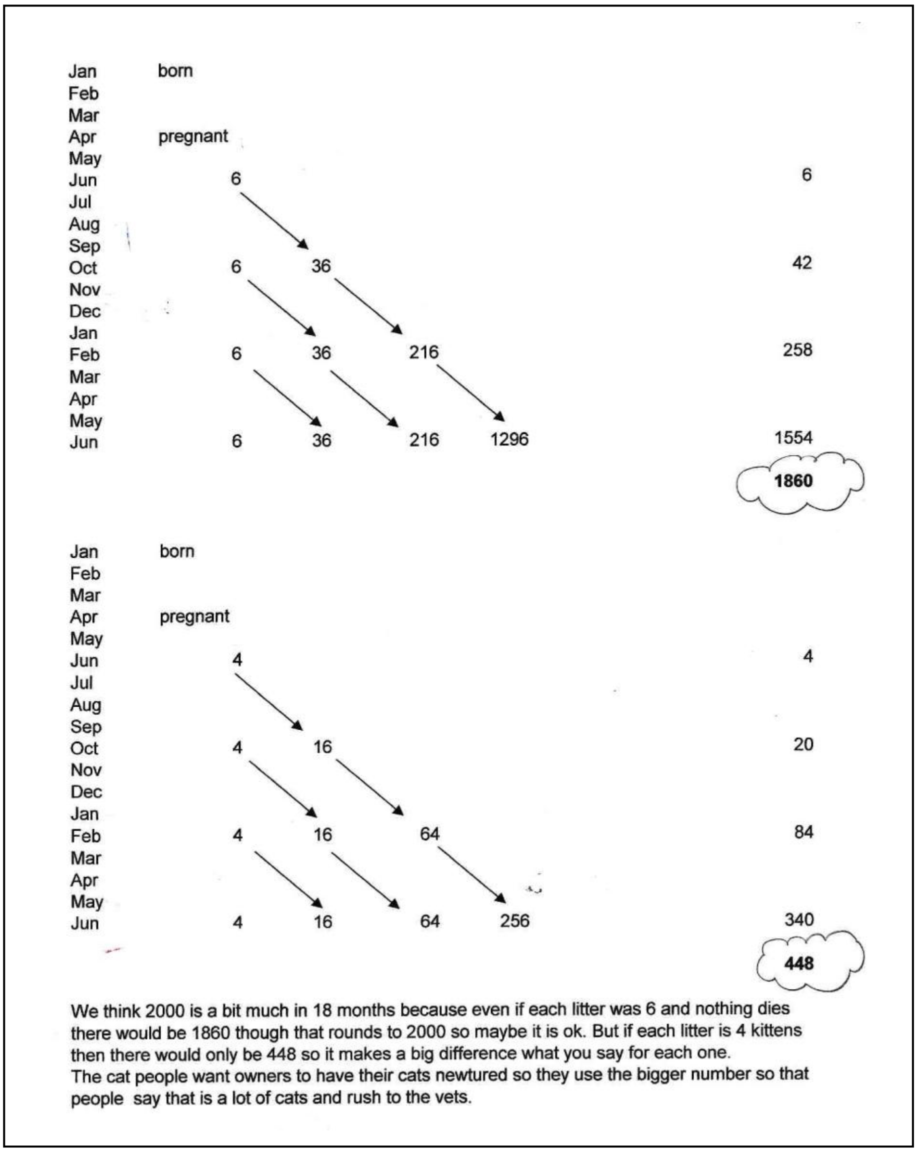
算術的な表現で，絵のような表現を１度やって途中であきらめている。216 の値は，それぞれの猫がただ１匹の母体から生まれてくるとしてかけ算を暗に示している。しかしすべての子孫の総数を見つけてはいない。累乗の正しい使い方は母体の木によって暗示する方法である。しかし。これは明示されていない。解釈や評価はかかれておらず，コミュニケーションは最低限である。

生徒Ｃへのコメント

- *あなたのやっていることを他の人に理解してもらうための助言について考えよう。*
- *課題で尋ねられていることについて考えよう。―2000 匹の子猫は現実的ですか，そうではないですか，また，それはなぜですかということについて考えていますか。*

生徒 Ｃは，彼の作業を他の人に説明する機会を多く与えるべきであろう。これは彼の作業や発見を記録することの大切さを理解するよい機会となるであろう。

生徒 のペア D



Jan	born					
Feb						
Mar						
Apr	pregnant					
May						
Jun		6				6
Jul						
Aug						
Sep						
Oct		6	36			42
Nov						
Dec						
Jan						
Feb		6	36	216		258
Mar						
Apr						
May						
Jun		6	36	216	1296	1554
						1860

Jan	born					
Feb						
Mar						
Apr	pregnant					
May						
Jun		4				4
Jul						
Aug						
Sep						
Oct		4	16			20
Nov						
Dec						
Jan						
Feb		4	16	64		84
Mar						
Apr						
May						
Jun		4	16	64	256	340
						448

We think 2000 is a bit much in 18 months because even if each litter was 6 and nothing dies there would be 1860 though that rounds to 2000 so maybe it is ok. But if each litter is 4 kittens then there would only be 448 so it makes a big difference what you say for each one.
The cat people want owners to have their cats newtured so they use the bigger number so that people say that is a lot of cats and rush to the vets.

累乗やかけ算をコントロールする効果的な方法を用意しているスプレッドシートを使っている。彼らの方法ははっきりしていて効果的である。彼らははっきりとプロセススキルの理解を示している。教師は，１匹の母体につき６匹の子猫を生むことの選択について議論した。彼らは，最も悪いシナリオを選択しており，４匹の子猫でを生むということを調べることを判断した。その違いは，かけ算場面で重要な差をつくる変数をどのように変えるかのよい例である。これは，クロスカリキュラムの議論の機会を提供している。例えば，世界中の出生率など。

生徒のペア **D** へのコメント

- *数を記録するとき，どのように基本的な構造を見抜くことができるかを考えようとしなさい。例えば，４，16，64，256・・・はどのような数列を帰納しますか？*

生徒は，コントロールしなければならない変数をもつ他の複雑な課題を解くときに利益を得るであろう。例えば，ケーススタディの「スピードカメラ」か「クラッシュテスト」である。

ここでは数学的判断力という視座から考察を加えることにする。

既に 2.2 で述べたように,「数学的判断プロセス」における「プロセス能力」に関する水準表は，BM の評価課題が，一つの問題の解決の様相を，プロセス能力を横軸に，その各プロセス能力に関する水準を縦軸に配置したルーブリックを用いて測ろうとしていることに示唆されたものである。

また，BM の評価課題のルーブリックが，個々の評価課題にそって個別の水準を設けていることからは，プロセス能力が領域や文脈に依存する「領域固有性」があることや，評価に際しては，一般的な記述による一つの水準内を，個々の問題や生徒の実態に即し細分化して捉える必要があることがわかる。

さらに，個々の評価課題及びそのルーブリックは，数学的判断プロセスにおける「プロセス能力」の発達の様相モデルを考える上で有効な資料となる。他の評価課題及びそのルーブリックの詳細は別稿にあらためて示すことにする。

3.5 本章のまとめ

本章では，イギリスのキーステージ 3（11 歳から 16 歳）を主な対象とした，数学教育改良プロジェクト Bowland Maths.の，「ケーススタディ」と呼ばれる教材，それを指導するための教師教育に当たる「教師教育モジュール」，子どもの評価のための「評価課題」を，数学的判断力の視座から考察した。

「ケーススタディ」では，オープンエンドな問題であり，かつ，解決で必要される数学が明らかでない状況において，プロセス能力と複数領域に渡る様々な数学を用いて解決を進めることが意図されていた。また，ペアやグループで解決することを推奨しており，解決過程では，解決者の文脈に対する価値付けが顕著になるものだった。このような点で，数学的判断のプロセスを実現する教材開発やそのような教材の指導を考える上できわめて示唆的であった。

「教師教育モジュール」は，「ケーススタディと数学」「定式化されていない問題を授業で扱う」「授業での協働作業の進め方」「ICT：リソースの効果的な使用」「発問と推論」からなり，各モジュールは「準備」「実践」「フォローアップ」の３つのセッションで構成されていた。数学的判断力の育成を図る授業，さらに，そのような授業を行うための教師教育を考える上で示唆に富んでいた。

「評価課題」では，個々の課題で，NC の主要プロセスである「表現」,「分析」,「解釈と評価」,「コミュニケーションと振り返り」の四つの観点を横軸，それらの水準を縦軸に配置したルーブリックを用いて測るもので，数学的判断プロセスにおける「プロセス能力」の評価の方法について示唆的だった。

引用文献・参考文献

Bowland Charitable Trust (2008). "*Bowland Maths*". (DVD)

西村圭一 (2011),「イギリス Bowland Maths.の教師教育モジュール －教師としての自己向上機能の

育成をめざしてー」，日本教材学会『第 23 回研究発表大会研究発表論文集』，pp.72-73
西村圭一・山口武志・清水宏幸・本田千春（2011)，「数学教育におけるプロセス能力育成のための教材と評価に関する研究ーイギリス「ボーランド数学（Bowland Maths.)」の考察ー」，日本数学教育学会，『数学教育』，第 93 巻，第 9 号，pp.2-12.

第４章　数学的判断力に関する実態調査

本稿の目的は，児童生徒の数学的判断力に関する実態の一端を明らかにし，授業実践への示唆を得ることである。そのために，第 2 章で明確化した数学的判断プロセスにもとづいて，数学的判断力をみる調査問題を開発した。そして，開発した調査問題を用いて実態調査を行い，結果を分析した。

調査を通して明らかにされた主たる実態は,「基準を設けて適切に数値化する児童生徒が少ない」,「自ら仮定を設定して問題解決する児童生徒が少ない」,「複数の項目に着目して判断する児童生徒が少ない」の 3 点である。

4.1　本章の目的

本章の目的は，数学的判断プロセスを辿りながら，数学的論拠に基づいて，事象を分析，解釈し，意志決定する能力に関する児童生徒の実態を明らかにすることである。そのために，調査問題を開発し，それを用いて実態調査を行い，結果を分析する。

4.2　調査の方法

4.2.1　調査問題の構成

調査問題は，次の 4 つの問題から構成された。

ア）回答者が自分の価値を基に，条件・仮定を設定して判断する問題
イ）ア）と場面は同じであるが，条件・仮定が設定されている問題
ウ）数学的判断プロセスをたどる問題
エ）OECD/PISA 数学的リテラシー調査の問題

例えば，ア）の問題とは，図 4-1 の問題である。この問題には，「食べ始めた時刻」,「給食時間中に立ち歩いた人数」,「4 時間目が体育の日」に関するデータが提示されており，回答者は，これらのデータを用いて，優勝・準優勝の組を決定するように求められている。その際，どのデータを考慮するのか（どのデータを捨象するのか）を判断するとともに，条件や仮定を設定することが必要となる。これがア）に位置づく問題である。

問題 1　南中学校では，給食を早く食べ始められるようにするために「ランチ・コンクール」を行っています。1 学期は，給食を食べ始めた時刻を調べ，優勝クラスを決めました。

生活委員会では，来週，2 学期の「ランチ・コンクール」を行うことにしました。その際，1 学期とは異なる決め方で優勝クラスと準優勝クラスを決めることにしました。そして，給食を食べ始めた時刻だけでなく，4 時間目が移動や着替えに時間が必要な体育になっている曜日と，給食時間中のマナーの向上に目を向けるために給食時間中に立ち歩いた人数を調べることにしました。

下の表は，各クラスの生活委員が，一週間，記録した結果です。例えば，1 組の月曜日に記録されている「12：55」は，給食を食べ始めた時刻を表し，「2」は，給食時間中に立ち歩いた人数を表しています。また，表の中の　は 4 時間目が体育の日を表しています。

4 時間目が終わる時刻　12：40　　給食を食べ始める目標時刻　12：55

	1 組		2 組		3 組		4 組		5 組	
月	12：55	2	12：54	0	13：06	2	12：48	3	12：55	0
火	12：58	1	13：03	1	12：52	3	13：02	2	12：50	2
水	12：50	1	12：58	0	12：50	0	12：51	3	13：01	1
木	13：02	2	12：52	0	12：48	2	12：55	0	12：56	0
金	12：51	0	13：00	1	12：49	4	12：54	2	12：58	1

あなたは何組を優勝にしますか。また，準優勝は何組にしますか。どのように考えたかも説明しましょう。

図 4-1　回答者が自分の価値を基に，条件・仮定を設定して判断する問題例

一方，イ）の問題とは，図 4-2 の問題である。

問題 2　南中学校では，給食を早く食べ始められるようにするために「ランチ・コンクール」を行っています。1 学期は，4 時間目が終わってから給食を食べ始めるまでの時間の合計で，優勝クラスを決めました。下の表は，そのときの 1 組から 5 組までの記録です。

4 時間目が終わる時刻　12：40　　給食を食べ始める目標時刻　12：55

	1 組	2 組	3 組	4 組	5 組
月	12：57	12：55	12：58	12：53	12：54
火	12：59	13：01	12：54	12：55	12：51
水	12：53	12：57	12：51	12：50	13：03
木	13：04	12：54	12：49	12：52	12：53
金	12：52	12：53	12：48	12：55	12：59

優勝したのは何組だったでしょうか。どのように考えたかも書きましょう。

図 4-2　条件・仮定が設定されている問題例

イ）の問題は，ア）の問題場面と同様な場面を扱っているが，提示されているデータが少なく，どのデータをどのように用いるのかが明示されている問題である。具体的には，「4 時間目が終わってから給食を食べ始めるまでの時間の合計で，優勝クラスを決めました」という文が，条件にあたる。ア）の問題に対する回答とイ）の問題に対する回答の比較を通して，条件・仮定の設定

に関する生徒の実態を顕在化させる。

次に，上記のア）とイ）の違いを第２章において提案した「数学的判断プロセス」における「プロセス能力」に関する水準表（表２）を用いて記述してみよう。

表 4-1　「数学的判断プロセス」における「プロセス能力」に関する水準表の一部

	定　義	自己内		
		水準１ 自己限定的	水準２ 多様性の萌芽	水準３ 社会的
A-1：定式化 Formalization	現実世界の問題を「数学の問題」に翻訳する（直す）能力	指示された視点にそって，現実世界の問題を「数学の問題」に翻訳する。	自分なりの視点を設定し，その視点から，現実世界の問題を「数学の問題」に翻訳する。	多様な視点を設定し，それぞれの視点から，現実世界の問題を「数学の問題」に翻訳する。
A-2：数学的表現 Representing	数学的な表現方法によって，判断過程や判断方法，判断結果を表現する能力	指示された数学的表現方法によって，判断過程や判断方法，判断結果を表現する。	自分なりの数学的表現方法を選択し，判断過程や判断方法，判断結果を表現する。	問題や目的に応じて，妥当な数学的表現方法を工夫し洗練し，判断過程や判断方法，判断結果を表現する。

「ランチコンクールの問題」で言えば，イ）に該当する問題２が A-1 の水準１を評価する問題として位置づけられ，ウ）に該当する問題１が A-1 の水準２並びに水準３を評価する問題として位置づけられる。

一方，「ウ）数学的判断プロセスをたどる問題」とは，図 4-3 の問題である。

問題３　「スーパー西遼」では，レジの前に長い列ができてしまうことがよくあります。

店長は，レジをもう１台買った方がいいのか，あるいは，２人１組になり，１人が入力，もう１人は会計（お金のやりとり）を担当するようにすればじゅうぶんかで悩んでいます。

そこで，店長は，レジ係の佐藤さんの仕事の様子を記録して，それをもとに，レジをもう１台買ったときと，２人１組にしたときの効果を予測して，比べることにしました。

あなたなら，佐藤さんの仕事の様子の，何を記録して，どのように比べますか。具体的に説明しましょう。

（記録することがら）

図 4-3　数学的判断プロセスをたどる問題例

ウ）の問題では，何に着目すべきかを考え，取捨選択をするとともに，着目した要素の間の関係を考えたり，条件や仮定を設定したりして，問題解決をしなければならない。それ故，ウ）の

問題に対する記述には，先の表 2 で示した水準 2 と水準 3 に該当する記述が見出されると考えられる。

例えば，水準 2 としては，次のような記述が該当する。

（記録することがら）

入力と会計の時間

1回のレジの時間

（比べ方）

入力と会計の時間をはかって，2人1組になった時の時間をだす。
レジをもう1台買えば単純に1回のレジの半分の時間ですむので
2人1組になったときにレジの全体の時間が半分以下になれば
2人1組にした方がよいし，半分以上ならレジを増やした方がよい。

上記の記述では，記録することがらとして，各商品の価格を入力する時間，金銭の受け取りをする時間，1 回のレジの時間を挙げている。そして，2 人 1 組になったときにレジ全体にかかる時間が，1 人でレジをするときにかかる時間の半分以上であれば，レジを購入した方がよいと判断している。この記述を「A-2 数学的表現」という視点から見てみると，「半分・以下といった数学の内容に関わる自分なりの言語表現を用いながら，判断過程を表現している」ので，水準 2 にあたると言えよう。一方，状況を詳細に捉え，妥当な数学的表現を工夫している水準 3 としては次の記述が該当する。

佐藤さんが，入力をするのにかかる平均時間を記録する。a 秒とする。

佐藤さんが，会計をするのにかかる平均時間を記録する。b 秒とする。

これらは，数十人のお客さんが実際にかかった時間を記録し，求める。

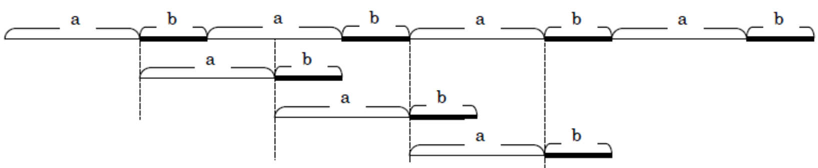
・レジをもう 1 台買った時

例えば，20 人のお客さんが支払いにかかる総時間を求める。
レジが 2 台あるので，1 台のレジにつき，（a＋b）×10（秒）かかる。

・2 人組みでレジをする時

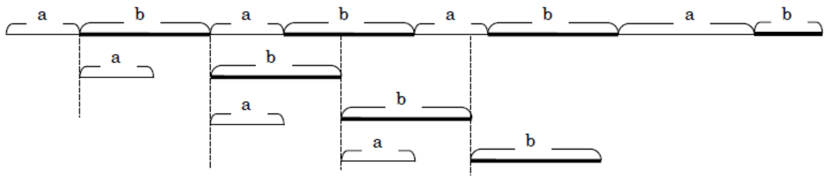
入力係を佐藤さんが担当し，会計係を鈴木さんが担当する。会計にかかる時間に関して，鈴木さんと佐藤さんは同程度とする。

・a＞b のとき



20 人のお客にかかる時間は，20a+b

・a＜b のとき



20 人のお客にかかる時間は，20b+a

・a＞b のとき

10a＋10b－（20a+b）＝9b－10a＜0　よって，レジをもう一台買った方が，同じ人数のお客にかかる総時間が短くなる。

・a＜b のとき

10a＋10b－（20b+a）＝9a－10b＜0　よって，レジをもう一台買った方が，同じ人数のお客にかかる総時間が短くなる。

・a＝b のとき

20a－21a＜0　よって，レジをもう一台買った方が，同じ人数のお客にかかる総時間が短くなる。

　これより，レジをもう一台買った方が，同じ人数のお客にかかる総時間が短くなる。

上記の記述では，記録することがらとして，各商品の価格を入力する時間，金銭の受け取りをする時間を挙げ，その大小関係による違いがあることに言及し，2 人以上の具体的な人数についての合計時間を求めて答えているのである。その際，文字式や図といった先の表現とは異なる表現を工夫して用いており，水準 3 に該当する。

エ）の問題は，OECD/PISA 数学的リテラシー調査の問題である。調査対象者が，どの程度，OECD/PISA 数学的リテラシー調査問題に正答できるのかどうかを見る。見ることによって，全体における調査対象者の位置を確認する。

ア），イ），ウ），エ）の 4 つの問題を 1 セットとし，A，B，C の 3 セットを作成する。

4.2.2 調査方法

①　調査実施日時

2011 年 7 月，9 月

③　　調査対象

調査では，小学校 6 年生，中学校 3 年生，高等学校 2 年生，大学生という 4 つの校種の児童，生徒，学生を対象とした。このように対象を選択した理由は，発達や学習経験と数学的判断力との関係を探ることを意図したからである。具体的な対象学校並びに調査人数は，表 4-2 の通りである。

教室内で A，B，C の 3 セットのいずれかをランダムに割り当て，配布する。その際，イ）はア）の回答の参考になるため，ア）の回収後に，イ）～エ）を配付する。

調査実施時間は 1 単位時間である。

また，計算の処理が複雑になると予想されたため，調査対象者全員に，電卓を配布し，自由に

使用して良いことを伝えた。

表 4-2　調査対象と人数

校種並びに学年	調査対象学校	人数
小学校 6 年生	東京及びその近郊の公立小学校 4 校, 国立大学附属小学校 1 校	468 人
中学校 3 年生	東京及びその近郊の公立中学校 3 校, 国立大学附属中学校 1 校	603 人
高等学校 2 年生	東京及び近畿の公立高校 2 校（中位), 国立大学附属高校 1 校	370 人
大学生	国立大学教育学部 2 校	115 人

4.3　調査結果

以下では，公立の小学校・中学校・高等学校の結果に焦点を当てて記述する。

4.3.1　セットＡの調査結果

①問題１と問題２（ランチコンクール）

セット A の問題 1（A-1，問題番号の記載は以下同様）と問題 2（A-2）を以下に示す。

問題 1　南中学校では，給食を早く食べ始められるようにするために「ランチ・コンクール」を行っています。1 学期は，給食を食べ始めた時刻を調べ，優勝クラスを決めました。

生活委員会では，来週，2 学期の「ランチ・コンクール」を行うことにしました。その際，1 学期とは異なる決め方で優勝クラスと準優勝クラスを決めることにしました。そして，給食を食べ始めた時刻だけでなく，4 時間目が移動や着替えに時間が必要な体育になっている曜日と，給食時間中のマナーの向上に目を向けるために給食時間中に立ち歩いた人数を調べることにしました。

下の表は，各クラスの生活委員が，一週間，記録した結果です。例えば，1 組の月曜日に記録されている「12：55」は，給食を食べ始めた時刻を表し，「2」は，給食時間中に立ち歩いた人数を表しています。また，表の中の ◯ は 4 時間目が体育の日を表しています。

4 時間目が終わる時刻　12：40　　給食を食べ始める目標時刻　12：55

	1 組		2 組		3 組		4 組		5 組	
月	12：55	2	12：54	0	13：06	2	12：48	3	12：55	0
火	12：58	1	13：03	1	12：52	3	13：02	2	12：50	2
水	12：50	1	12：58	0	12：50	0	12：51	3	13：01	1
木	13：02	2	12：52	0	12：48	2	12：55	0	12：56	0
金	12：51	0	13：00	1	12：49	4	12：54	2	12：58	1

あなたは何組を優勝にしますか。また，準優勝は何組にしますか。どのように考えたかも説明しましょう。

図 4-4　セットＡ　問題１

問題 2　南中学校では，給食を早く食べ始められるようにするために「ランチ・コンクール」を行っています。1 学期は，4 時間目が終わってから給食を食べ始めるまでの時間の合計で，優勝クラスを決めました。下の表は，そのときの 1 組から 5 組までの記録です。

4 時間目が終わる時刻　12：40　　給食を食べ始める目標時刻　12：55

	1 組	2 組	3 組	4 組	5 組
月	12：57	12：55	12：58	12：53	12：54
火	12：59	13：01	12：54	12：55	12：51
水	12：53	12：57	12：51	12：50	13：03
木	13：04	12：54	12：49	12：52	12：53
金	12：52	12：53	12：48	12：55	12：59

優勝したのは何組だったでしょうか。どのように考えたかも書きましょう。

図 4-5　セットＡ　問題２

A-1 に対して，回答類型を作成し，分類した（以下は一部）。

番号	類型
20	食べ始めの時刻を処理し（合計や平均を求め），「体育の後」と「立ち歩き人数」をともに加味して，順位を決めている（または決めようとしている）。
21	目標時刻に間に合わなかった回数や間に合った回数を求め，「体育の後」と「立ち歩き人数」をともに加味して，順位を決めている（または決めようとしている）。
29	20，21 以外で，「体育の後」と「立ち歩き人数」をともに加味して，順位を決めている（または決めようとしている）。
28	20，21，29 のいずれかの考え方をしているが，方法が不適切である（方法に誤りがある，計算間違いは除く）。
10	食べ始めの時刻を処理し（合計や平均を求め），「体育の後」のみを加味して，順位を決めている（または決めようとしている）。（「立ち歩き人数」は加味していない。）
11	食べ始めの時刻を処理し（合計や平均を求め），「立ち歩き人数」のみを加味して，順位を決めている（または決めようとしている）。（体育の後は加味していない。）
12	目標時刻に間に合わなかった回数や間に合った回数を求め，「体育の後」のみを加味して，順位を決めている（または決めようとしている）。（「立ち歩き人数」は加味していない。）
13	目標時刻に間に合わなかった回数や間に合った回数を求め，「立ち歩き人数」のみを加味して，順位を決めている（または決めようとしている）。（「体育の後」は加味していない。）
19	10，11，12，13 以外で，「体育の後」または「立ち歩き人数」のどちらか一方を加味して，順位を決めている（または決めようとしている）。
18	10，11，12，13，19 のいずれかの考え方をしているが，方法が不適切である（方法に誤りがある，計算間違いは除く）。

問題 1 と問題 2 の回答状況に着目する。なお，問題 1 の「体育の後」と「立ち歩き人数」をと

もに加味した回答と「体育の後」または「立ち歩き人数」の一方のみを加味した回答をわけて表にまとめているが，どちらも正答としている。

表 4-3　セットＡ　問題１と問題２の正答率

		公立小	公立中	公立高
問題1	「体育の後」と「立ち歩き人数」をともに加味	20%	39%	53%
	「体育の後」または「立ち歩き人数」の一方のみ加味	53%	42%	38%
問題2	時間の合計（目標時刻との差など）がもっとも少なかった 3 組を優勝としている	49%	73%	54%

同様な傾向は，後述するセット C の問題 1 と問題 2 の正答率にも見られる。

表 4-4　問題１と問題２（SetC）ポカリウスの正答率

	公立小	公立中	公立高
問1	70%	68%	64%
問2	35%	60%	42%

この 2 つのセットの問題 1 と問題 2 では，問題 1 の方が問題 2 より正答率が高い結果となっている。出題の意図としては，価値判断を伴う問題 1 の方が，従来の算数数学の問題のような問題 2 よりも難しいと考え，正答率が低いのではないかという予想のもと，調査を実施した。

問題 1 をやり終えたところで問題用紙を回収してから，問題 2 に取り組んでもらったが，問題 2 を解決するときに，問題 1 の方法などに影響を受けていると考えられる。また，問題 1 では，解決の方法がオープンであるため，自分の知っている方法での解決が可能になるが，問題 2 では，問題文で「時間の合計で，優勝クラスを決めました」と解決の方法を 1 つに絞って問うているため，その方法に沿って計算をしなければならず，計算間違い等も多かったと考えられる。

さらに，問題 2 の回答類型 78（時間の合計を用いていない）の児童生徒の回答の中身を確認してみると，小学生の 40%が，問題 1 の回答類型 19 であり，最も多い割合であった。つまり，問題 2 で時間の合計を用いていない児童は，問題 1 で時間に対する処理をしていない傾向が見られる。

A-3 に関しては，吹き出しが印刷されていなかったという不備があったため，参考扱いにし，ここでは調査結果について記述しない。

4.3.2　セットＢの調査結果

①問題 1（体力の問題）

セットＢの問題 1 は，体力が伸びているかどうかを，値や順位に応じて自分で基準を設けて数値化し，判断する問題である。

問題１　北小学校では，2008 年から，児童の体力を伸ばす取り組みを行ってきました。

下の表は，次の 5 つの種目についての，2007 年から 2010 年の 5 年生男子の記録の平均値です。

ソフトボール投げ（m）　50m 走（秒）　1000m 走（分 秒）

上体起こし（回）　握力（kg）

	ソフトボール投げ（m）	50m 走(秒)	1000m 走（分 秒）	上体起こし（回）	握力（kg）
2007 年	27	9.0	4 分 8 秒	20	18
2008 年	28	8.8	4 分 7 秒	22	20
2009 年	32	9.2	4 分 6 秒	21	21
2010 年	34	9.1	4 分 10 秒	23	22

校長先生は，体力を伸ばす取り組みの成果が表れているのかどうかと悩んでいます。5 年生の男子の体力が伸びているといえるか，いえないかを判断しましょう。そう判断した理由も説明しましょう。

いえる　・　いえない　（どちらかに○をつけましょう）

（理由）

図 4-6　セットＢ　問題１

B-1 に対して，次ページの類型を作成し，分類した。

表 4-5　B-1 の類型

番号	類型
10	2010 年と他の年を比べて，よくなった種目とそうでない種目を正しく分類し，その数で判断している。
11	種目ごとに正しく順位をつけ，得点化して判断している。
12	各年の成績を，値が小さいほど好成績な種目を考慮して，数値化し（指標を作り），判断している。
13	それぞれの種目の変化量を求め，値が小さいほど好成績な種目があることを考慮して，正しく判断している。
14	体力に関わる種目を限定し，正しく比較している。
15	提示された情報では判断できないと（いう趣旨のことを）答えている。
16	10－15，17，18 以外の方法を示し，正しく判断している。
17	2007 年と他の年を比べて，よくなった種目とそうでない種目を正しく分類し，その数で判断している。
18	2007 年と他の年の平均値を比べて，判断している。
70	2010 年や 2007 年と他の年を比べて，よくなった種目とそうでない種目に分類し，その数で判断しているが，分類に誤りがある。

71	種目ごとに順位をつけ得点化しているが，順位に誤りがある。
72	各年の成績を，値が小さいほど好成績な種目があることを考慮せずに，数値化して（指標を作って）いる。
73	それぞれの種目の変化量を求めているが, 値が小さいほど好成績な種目があることを考慮せずに判断している。
74	体力に関わる種目を限定し比較しているが，判断に誤りがある。
78	その他のあいまいな理由や正しく比較できていないもの 。
79	明らかに問題とは関係ないことを書いている。

上記の類型以外に，70 番台と 90 番台の類型も作成し，分類した。70 番台には，値が小さいほど好成績な種目と大きいほど好成績な種目があることを区別できていないことに基づく誤りをしているが該当する。また，90 番台は，「理由のみ無答」，「完全に無答」が該当する。

「いえる・いえない」のどちらを選んだかに関わらず，経年比較をして適切に理由を説明できた児童生徒，すなわち上記の類型の 10 番台に該当する児童生徒の割合は表 6 の通りである。

表 4-6　B-1 で適切に理由を説明できた割合

公立小	公立中	公立高
67%	75%	65%

いずれの校種でも，もっとも多かったのは，「2007 年と他の年を比べて，よくなった種目とそうでない種目を整理し，その種目数で判断している」回答であり，3~4 割であった。次いで多かったのは，「体力に関わる種目を限定し比較している」であった。

この問題で特に注目したい回答は，自分で基準を設けて数値化している回答である。具体的には，種目ごとに順位をつけ，得点化（数値化）して判断している回答や，各種目の変化量を求め，値が小さいほど好成績な種目があることを考慮して判断している回答である。これらの回答の割合を表 5 に示す。誤答は，数値化してはいるが，順位を誤っているものや値が小さいほど好成績となる種目を考慮せずに判断しているものである。

表 4-7 は，自分で基準を設けて数値化している児童生徒が少ないという実態を示している。特に，中学校の生徒が少ない。また，小学校，高等学校では，数値化のアイディアを持ってはいるが，適切に数値化できなかった児童生徒が少なからずいることが明らかになった。

表 4-7　B-1 で数値化した割合

	公立小	公立中	公立高
数値化（正答）	3%	3%	1%
数値化（誤答）	18%	6%	17%

はっきりと数値化していない生徒の回答例（中学校）

いえる　・　いえない　（どちらかに○をつけましょう）

（理由）

各種目4年間の平均を出して、それを上回っている種目が多いから。

いえる　・　いえない　（どちらかに○をつけましょう）

（理由）

記ろくが年をとるほどにのびているから

②問題 3（千羽鶴の問題）

B-3 は，自分で仮定をおいて答えを導く問題である。

問題 3　あなたのクラスでは，「千羽鶴（せんばつる）」をつくることになりました。学校の休み時間だけを使って折るとすると，折り紙で 1000 羽の鶴（つる）を折るのに，何日かかるでしょうか。どのように考えたかも説明しましょう。

（考え方）

図 4-7　セットＢ　問題３

クラスの人数や参加人数，1 日に折り紙を折るのに使える時間，一羽の鶴を折るのにかかる時間などを仮定し，正しい計算をしているものを正答とした。この正答率は，公立小 47%，公立中 46%，公立高 82%だった。公立の小・中学校の児童生徒が，こうした問題に適切に対応できないことを示している。また，誤答に焦点をあてて分析してみると，いくつかの仮定を明示せずに使用して回答しているものが多く見られた（表 8）。

表 4-8　B-3 で仮定を明示せずに回答した割合

公立小	公立中	公立高
24%	20%	7%

仮定を明示していない生徒の回答例（中学校）

（考え方）クラスが30人だとすると1人が34枚おれば1020枚をおることができる。(20枚はよび)

通常の算数・数学では，仮定は，問題の中で既に設定されている場合が多い。そのため，B-3

のように，自分で様々な事柄を仮定して問題を解くという経験が少ない。こうした実態が上記の児童生徒の実態に影響を及ぼしていると考えられる。

4.3.3　セットCの調査結果

①問題1と問題2（スポーツ飲料の問題）

C-1 は，スポーツ飲料を，人数，活動日，部の活動内容（体育部と文化部）などを考慮して，各部にどのように振り分ければよいかを決める問題である。

問題 1　あきらさんの学校は，スポーツ飲料「ポカリウス」の粉末を600袋もらいました。これを夏休みに活動するクラブに分けることにしました。

夏休みに活動するクラブの人数と活動日数は，下の表の通りです。

クラブ	人数	活動日数
バスケットボール	20	14
サッカー	50	12
テニス	30	18

クラブ	人数	活動日数
バドミントン	15	8
合　唱	25	24
理　科	10	24

あなたなら，それぞれのクラブに何袋ずつ分けますか。どのように考えたかも説明しましょう。

（考え方）

図 4-8　セットC　問題 1

C-1 に対して，以下の類型を作成し，分類した。

表 4-9　C-1 の類型

番号	類型
30	「人数」×「活動日」の比で分配している。
31	「人数」×「活動日」に，「部の特性」を加味した比で分配している。
32	「人数」または「活動日数」に，「部の特性」を加味した比で分配している。
33	「人数」と「活動日」をともに加味して，比（「人数」×「活動日」の比，「人数」の比，「活動日数」の比）以外の方法で，分配している。
34	300 ずつに分けて，一方は「人数」の比で，もう一方は「活動日数」の比で分配している。

上記の類型以外に，20 番台，10 番台，70 番台の類型も作成し，分類した。20 番台には，30 番台の考え方をしているが，それにもとづく分配数に誤りがあったり，求められていなかったりするものが該当する。一方，10 番台には，「人数」「活動日」「部の特性」のうちの 1 つを加味して分配しているものが該当する。また，70 番台は，「あいまいな記述」「問題とは関係ないことを記述している」が該当する。

表 10 には，C-1 で，人数，活動日，部の活動内容（体育部と文化部）などのうち，2 つ以上の

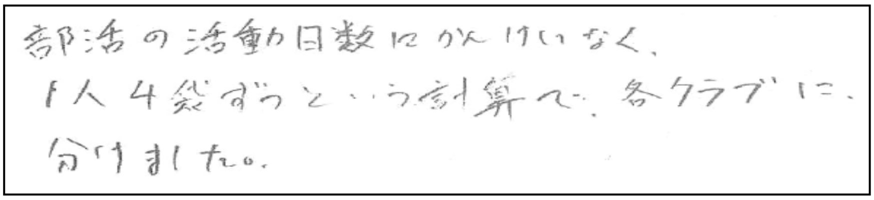
項目を加味し，正しく処理し配分した回答（類型の 30 番台），並びに，その処理に誤りがあった回答（類型の 20 番台），1 つの項目だけに着目し配分した回答（類型の 10 番台）の割合を示す。

表 4-10　C-1 の回答の割合

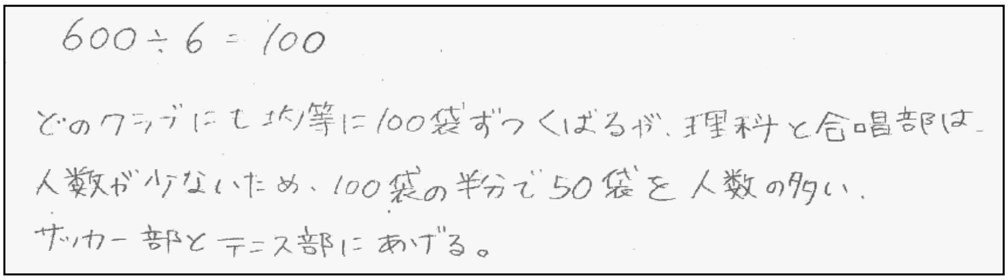
回答類型	公立小	公立中	公立高
2 つ以上・正	17%	23%	16%
2 つ以上・誤	1%	11%	0%
1 つ	53%	46%	75%

C-1 では，どの校種でも，2 つ以上の項目を加味した児童生徒の割合が低いことがわかる。また，1 つの項目だけで考えた公立高の生徒の割合が顕著に高かった。さらに，2 つ以上の項目を加味した回答の中身を調べてみると，自分で新たな指標（例えば，「人数」×「活動日」）を作成した人数は，公立小 94 人中 5 人，公立中 132 人中 10 人，公立高 69 人中 2 人であった。ここでも，B-1 と同様に，自分で基準を設けて数値化している児童生徒が少ないという実態が見られる。

○人数のみで分配した生徒の回答例（高校）


部活の活動日数にかんけいなく、
1人4袋ずつという計算で、各クラブに、
分けました。

○１００袋ずつに等分したあとで人数を考慮して分配した生徒の回答例（高校）


600÷6=100
どのクラブにも均等に100袋ずつくばるが、理科と合唱部は、
人数が少ないため、100袋の半分で50袋を人数の多い、
サッカー部とテニス部にあげる。

次に，C-2 に着目する。問題文で指示されているように，人数だけを考慮して，正しく配分した回答を正答とした。この正答率は，公立小 54%，公立中 63%，公立高 51%で，ほぼ同じであった。比を用いて解決する問題であり，小学校 6 年生で学習する内容である。なぜ，公立高校の生徒の多くが，誤答しているのだろうか。それを探るために，誤答の回答類型の中身を確認すると，問題の条件を加味していなかったり，比を適切に使おうとしていなかったりしたことを原因とする誤答が見られた。例えば，「部員が多い吹奏楽を一番多くして，少ないバスケットボールを減らした。吹奏楽部は 45 袋。サッカー部 40 袋。バスケットボール部は 35 袋」のように，比を適切に使っていないものである。

問題２　たかこさんの学校は，スポーツ飲料「ポカリウス」の粉末を 120 袋もらいました。たかこさんの学校では，夏休みに活動するクラブは，バスケットボール，吹奏楽，サッカーの３つですが，活動日数はまだ決まっていません。そこで，クラブの人数だけを考えて，分けることにしました。

クラブの人数は，下の表の通りです。

クラブ	人数
バスケットボール	16
吹奏楽	24
サッカー	20

それぞれのクラブは何袋ずつになりますか。どのように考えたかも説明しましょう。

（考え方）

図 4-9　セットＣ　問題２

また，C-2 で正答している児童生徒の，C-1 における回答状況（表 11）を見てみると，C-2 に正答している児童生徒のうち，C-1 において人数のみの比で分配している児童生徒の割合が多いことがわかる。

表 4-11　C-2 の正答者中の C-1 の回答

	公立小	公立中	公立高
2 つ以上・正	18%	28%	21%
2 つ以上・誤	0%	11%	0%
1 つ	41%	33%	34%

つまり，これらの児童生徒は，比については理解しているが，複数の項目に着目して考えない傾向にあることを示唆している。

②問題 3（走り幅跳びの問題）

C-3 は，3 人の選手の中から，1 人の走り幅跳びの選手を選ぶ場面において，昨日と今日の 5 回ずつの走り幅跳びの記録を基に，1 人の選手の選択を判断する問題である。

問題３ 学校対抗の陸上大会があります。担当の村田先生は，「走り幅跳び」の選手１名を誰にするか悩んでいます。

「走り幅跳び」は，１人が３回跳び，その中で最も遠くまで跳んだ人が優勝となります。昨年までの２年間の優勝記録は，次の通りです。

年	2009 年	2010 年
優勝記録	403 cm	385 cm

村田先生は，選手を選ぶために，下の表の昨日と今日の記録を見ています。×の印は，ファール（記録なし）を示しています。

あなたなら，「ひでき」，「ようすけ」，「わたる」のうちの誰を選手にしますか。<u>そう考えた理由も説明しましょう。</u>

「走り幅跳び」の記録

昨日

	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目
ひでき	355 cm	345 cm	385 cm	360 cm	370 cm
ようすけ	×	375 cm	353 cm	390 cm	365 cm
わたる	400 cm	×	315 cm	402 cm	×

今日

	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目
ひでき	×	369 cm	372 cm	375 cm	386 cm
ようすけ	376 cm	×	357 cm	386 cm	374 cm
わたる	×	×	×	320 cm	405 cm

私なら，____________を選手に選びます。

（理由）

図 4-10　セットＣ　問題３

C-3 に対して，以下の類型を作成し，分類した。

表 4-12　C－３の類型

番号	類型
20	ファウルを除いた平均値とファウルの回数（またはファウルする確率）に着目し，選択している。
21	各個人の最大値や最小値（ファウルを除く）とファウルの回数（またはファウルする確率）に着目し，選択している。
22	ある記録以上（過去の優勝記録も含む）になる確率に着目し，選択している。
25	各個人の上位の記録（例えば，上位 2 つずつ）あるいは，その平均値に着目し，選択している。
26	3 回ずつに区切って誰が優勝しているかに着目し，選択している。
27	記録を階級に分け（例えば，360~380，380~400，・・・など），その度数に着目し，選択している。
28	20,21,22,25,26,27 以外で，記録とファウルの回数の両方を考慮し，選択している。

上記の類型以外に，10 番台，70 番台，90 番台の類型も作成し，分類した。10 番台は，記録か

ファウルの回数のどちらかのみを考慮したものである。70 番台は,「あいまいな記述」「問題とは関係ないことを記述している」が該当する。また，90 番台は,「理由のみ無答」,「完全に無答」が該当する。

記録の平均値や最大値等とともに，ファールの回数を考慮に入れて回答しているものに着目する（回答類型の 20 番台）。この割合と記録かファールの回数のどちらかだけを考慮した回答（回答類型の 10 番台）の割合は表 4-13 の通りである。

表 4-13　セットＣ　問題 3 の回答の割合

	公立小	公立中	公立高
記録とファール	30%	40%	64%
記録かファールの回数のどちらか	62%	47%	30%

平均値や最大値等に，ファールを加味して判断した児童生徒の割合が小中高と校種が上がるにつれて高くなっている。また，小学校と高等学校では，この割合と「記録かファールの回数のどちらかだけを考慮した」割合が逆転している。つまり，この問題では，小学生は 1 つの項目で判断する傾向にあるが，高校生は複数の項目に着目して判断する傾向がある。高校生の方がこのような場面を理解し，複眼的に考えて回答することができたと考えられる。

4.3.4　PISA 調査の問題に関して

①セットＢ　問題４（スケートボード）

表 4-14　セットＢ　問題 4 の比較

	公立小	公立中	公立高	PISA2003 の日本の正答率
問1	42%	51%	63%	67%
問2	37%	60%	69%	46%
問3	42%	55%	56%	50%

小，中，高といずれの問も正答率が上がっている。特に，問 2，問 3 では，中学校から PISA2003 の正答率を上回っている。

②セットＣ　問題４（輸出）

表 4-15　セットＣ　問題 4 の比較

	公立小	公立中	公立高	PISA2003 の日本の正答率
問1	70%	68%	64%	79%
問2	35%	60%	42%	48%

問 1 の正答率は，小→中→高と徐々に低くなっている。他の調査でも指摘されているように，割合は，小学校における本質的な定着が悪く，中学校以降，学習する機会が減ると，学年進行とともにできなくなることが推察される。

4.3.5 国立大学附属小中学校の結果について

国立大学附属小中学校の児童生徒は，普段の授業の中でも本調査問題に類似した学習を行っていることが想定される。また，自分で考えを進展することができる児童生徒が多いと考えられる。このような児童生徒の結果をみてみる。本調査で着目した数学的な判断を要するような問題であるA，B，Cそれぞれのセットの1，3といった自分で数値化したり，仮定をおいたりする問題において小学校の方が，上回っている傾向がある。中学校へいくと，数学に対する考えが固定され，柔軟さが失われていく可能性がある。それは，本研究の授業実践の中で，数学が得意な生徒が，自分で仮定してみると，その仮定した値がもし違ったものだったら，答が変わってきてしまうので，それなら仮定などせずに与えられた情報のみで考えようとしたという感想に象徴されている。小学校の早い段階から，数学的判断力を育成する授業を仕組んでいくことが大切ではないかと考える。

表 4-16 前掲の A-1，A-2，B-1，B-3，C-1，C-2，C-3 の問題における正答率（%）

問 題		A-1		A-2		B-1		B-3		C-1		C-2		C-3	
回答類型＼校種		小	中	小	中	小	中	小	中	小	中	小	中	小	中
正答	30番台									32.7	23.5				
	20番台	52.9	41.2					85.7	76.5	12.2	17.6	79.6	23.5	30.6	54.9
	10番台	39.2	27.5	56.9	56.9	57.1	84.3	10.2	15.7	36.7	31.4	0.0	13.7	61.2	43.1
誤答	70番台	7.8	31.4	43.1	43.1	42.9	15.7	4.1	7.8	18.4	25.5	20.4	60.8	8.2	2.0
	90番台	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0	0.0	2.0	0.0	0.0

4.4 調査結果の考察

本調査を通して明らかにされた実態の1つとして，自分で基準を設けて適切に数値化し，その数値を根拠にして考えを述べる児童生徒が極めて少ないということである。これは， B-1とC-1の結果に見出された。数値化する学習は，算数数学の中で全くないわけではない。例えば，算数の速さでは，「速さ」というあいまいな言葉を時間と距離によって定義し，その定義に基づいて数値化する学習をしている。また，同種の量の割合の学習で用いられる「バスケットボールのシュートの問題」（田端，2003）では，「同じ上手さ」という言葉を定義し，数値化しているのである。つまり，割合の学習の中に，数値化を経験する機会が存在しているのである。本調査によって明らかにされた実態を改善するためには，これまでの授業を見直し，数値化が意識的に経験できるように授業を行うとともに，新たな教材を開発し，小中高の学習内容に位置付け，授業化していく必要がある。

本調査を通して明らかにされた2つ目の実態は，自ら仮定を設定して問題を解決する児童生徒が少ないということである。また，1個ないし2個の仮定は設定しているが，いくつかの仮定を明示せずに使用してしまっているという実態である。これは，B-3の結果に見出された。こうした実態を改善するためには，仮定を設定して問題を解決する授業を行っていくことが必要である。

また，児童生徒の解決では，仮定が意識の下に埋没している場合が多いため，授業においては，設定した仮定を意識化させ，仮定に関する議論を行うことが重要である。

本調査を通して明らかにされた 3 つ目の実態は，複数の項目に着目して判断をする児童生徒が少ないということである。これは，C-1，C-2 の結果に見出された。だが，C-3 では，先の問題に比べて，複数の項目に着目して判断する高校生が多いという実態も見出されている。つまり，問題によって, 発達の影響を強く受ける場合があることが示唆されるのである。この点については，さらに調査研究が必要である。

本調査を通して明らかにされた 4 つ目の実態は，A-1,2，C-1,2 で見られるように価値判断を伴う問題 1 の方が，従来の算数数学で出題されている問題 2 より正答率が高い結果であるということである。出題する側としては，問題 1 の方が問題 2 よりも正答率が低いことが予想されていたが，この 2 つのセットの問題においては，逆の結果となった。このことから，社会的価値判断を要求するような課題の解決がそれほど児童生徒たちに受け入れられないことはなく，課題の設定の仕方によっては充分授業のなかで児童生徒が取り組むことが可能であることを示唆している。

本調査における児童生徒の回答には，「授業づくりの枠組み」（西村ら，2011）の「D：社会的価値観」の記述が随所で見られた。例えば，「スポーツ飲料」と「走り幅跳び」の両問題では，ともに「平均」という数学的アイディアが鍵になるが，それを用いる際に生じる価値認識は異なっていた。つまり，子どもの記述からは，「スポーツ飲料」では，「公平性」や「平等性」といった価値認識にもっぱら焦点があたっていたが，「走り幅跳び」では，むしろ「効率性，有限性」といった価値認識に焦点が当たっていたのである。文脈依存的でオープンエンドな問題を工夫すれば，小学校から高等学校にわたって，子どもの価値認識をふまえた授業を十分に展開することが可能であることが確認されたと考える。

4.5　本章のまとめ

本章の目的は，児童生徒の数学的判断力に関する実態の一端を明らかにし，授業実践への示唆を得ることであった。調査を通して明らかにされた主たる実態は，「基準を設けて適切に数値化する児童生徒が少ない」，「自ら仮定を設定して問題解決する児童生徒が少ない」，「複数の項目に着目して判断する児童生徒が少ない」の 3 点である。

引用文献・参考文献

Henry O.Pollak（2003）, A history of the teaching of modeling, *A History of School Mathematics* Volume1, NCTM, pp.647-671

小橋康章（1988）,『認知科学選書 18　決定を支援する』, 東京大学出版会，p.40

国立教育政策研究所編（2004），『生きるための知識と技能 2・OECD 生徒の学習到達度調査（PISA）・2003 年調査国際結果報告書』，ぎょうせい

西村圭一, 山口武志, 久保良宏（2011）,「数学的判断力の育成に関する研究－その意義と授業の枠組みとについて－」, 第 44 回数学教育論文発表会論文集, pp.237-242

田端輝彦（2003），「同種の量の割合の導入に関する一考察」，日本数学教育学会誌算数教育，第 85 巻第 12 号，pp.3-13

竹村和久（1996）,「第4章　意思決定とその支援」,『認知心理学4　思考』, 東京大学出版会，p.81

第５章　数学的判断力の育成のための教材の開発

本章では，第 3 章で見た Bowland Maths.のケーススタディの条件を念頭に，さらに第 4 章に示した子どもの実態もふまえつつ，数学的判断力の育成を図る授業で用いる問題，すなわち教材の開発に取り組む。開発した 35 の教材を，問題場面が要請している「活動」を着眼点として，「優劣や順位を付ける場面」「最適な状態を考える場面」に分類し示す。

5.1　教材の要件

第 3 章で見た Bowland Maths.のケーススタディの公募条件を念頭に，さらに，第 4 章で明らかにした数学的判断力に関する子どもの実態，すなわち，「基準を設けて適切に数値化する児童生徒が少ない」，「自ら仮定を設定して問題解決する児童生徒が少ない」，「複数の項目に着目して判断する児童生徒が少ない」ことを念頭に，以下の条件をみたす「現実世界の問題」を開発する。

a.　子どもたちの様々な価値観が表出される
b.　子どもが，互いに考えを伝え合ったり，吟味したりしながら判断する必要性を感じる
c.　多様なアプローチが可能で，オープンエンドである

本研究における「現実世界の問題」は，必ずしも現実そのものの事象やデータではなく，フィクションを含む。すなわち，子どもが数学的判断プロセスを実現し得るような文脈を設定することを優先する。

5.2　開発した教材

ここでは，開発した問題を，「優劣や順位を付ける場面」「最適な状態を考える場面」に分けて示す。この分類は，開発した後で分類した結果であり，当初から設定していたものではない。第 4 章の数学的判断力の実態調査のための調査問題の開発過程での議論，並びに，その調査結果をふまえ，数学的判断力の育成の初期段階で，授業でどのような問題を扱うとよいかを考えた結果，これらの場面が多くなったのである。したがって，数学的判断力の育成を図る教材は，これらの場面に限定されるものではない。

5.2.1　優劣や順位を付ける場面

選択肢が明示的かつ限定的であり，それらに対して，優劣や順位を付け，判断する場面である。優劣や順位の付け方はオープンであり，様々な価値観が反映される。なお，「　　」は問題名，(　) は開発者名である。

① 「走り幅跳び」(室谷)

５年生は，来月，体力テストがあります。そのテストの結果をもとに，陸上の選抜チームを作ります。代表の４種目のうち，３種目の代表は決まったのですが，あと一人，はばとびの代表を選ぶ必要があります。

	１回目	２回目	３回目	４回目	５回目
たかし	355ｃｍ	345ｃｍ	385ｃｍ	360ｃｍ	370ｃｍ
たける	×	372ｃｍ	350ｃｍ	390ｃｍ	360ｃｍ
たけし	400ｃｍ	×	×	405ｃｍ	×
たかひろ	×	385ｃｍ	372ｃｍ	×	378cm

② 「ソフトボール投げの記録」(山口)

「ソフトボール投げ」と「走り幅跳び」の種目がある陸上大会に出場する選手を選びたいと思っています。

「かずま君」と「しゅうじ君」の「ソフトボール投げ」と「走り幅跳び」の練習の記録は，次の表のとおりでした。表の「×」印は，ファールとなった場合で，記録がありません。

もし,「かずま君」と「しゅうじ君」のどちらかを選手に選ぶとすると，どちらを選びますか。あなたの考えを説明しなさい。

表１ 「ソフトボール投げ」の記録

	１回目	２回目	３回目	４回目	５回目
かずま君	２１	３４	３１	１９	４０
しゅうじ君	３０	×	×	３４	３１

(単位：メートル)

表２ 「走り幅跳び」の記録

	１回目	２回目	３回目	４回目	５回目
かずま君	3.27	2.15	3.14	3.64	2.32
しゅうじ君	3.13	3.06	×	3.25	×

(単位：メートル)

③ 「スポーツテスト」(清野)

北小学校では，2008年から，児童の体力を伸ばす取り組みを行ってきました。

下の表は,次の5つの種目についての,2007年から2010年の5年生男子の記録の平均値です。

	ソフトボール投げ（m）	50m走（秒）	1000m走(分秒)	上体起こし(回)	握力（kg）
2007年	27	9.0	4分8秒	20	18
2008年	28	8.8	4分7秒	22	20
2009年	32	9.2	4分6秒	21	21
2010年	34	9.1	4分10秒	23	22

校長先生は，体力を伸ばす取り組みの成果が表れているのかどうかと悩んでいます。5 年生の男子の体力が伸びているといえるか，いえないかを判断しましょう。

④　「野球選手のトレード」（室谷）

あるプロ野球チームでは，チームの外野の守備力向上のために，より守備のうまい選手を獲得しようと考えて，二人の選手をリストアップしました。この選手たちの昨年度の成績は以下の表のようになっています。なお，この選手たちは打撃成績，年齢などはほぼ同等です。

	試合数	出場ｲﾆﾝｸﾞ数	守備機会	アウト数	刺殺	補殺	失策
A	100	750	200	185	180	5	15
B	75	600	15０	14０	130	1０	10

※出場ｲﾆﾝｸﾞ数…出場した回数（１ｲﾆﾝｸﾞは３アウトで換算）
守備機会　…その選手の守備範囲に打球が飛んできた回数
刺　　殺　…外野手の場合，フライを取った回数
補　　殺　…外野手の場合，おもに返球により走者をアウトにした回数
失　　策　…その選手の守備範囲にきた打球をエラーした回数

⑤　「先発投手を誰にするか？」（櫻井）

草野球のリーグ戦を行っています。若桐ジャガーズは次の試合に負けると，Ｂクラス入りが決定してしまいます。里田監督は，最も信頼できるピッチャーに次の試合の先発を任せ，このピンチを乗り切りたいと考えています。

あなたが里田監督だったら，どのピッチャーを選びますか。また，選んだ理由についてもいいなさい。

	投手名	勝利数	敗北数	打者数	投球回数	被安打	被本塁打	与四球	奪三振	失点
A	寺崎	12	10	705	170	162	4	43	112	67
B	塩津	14	8	699	177	148	13	31	150	57
C	高田	9	9	638	154	144	7	34	113	42

⑥　「バスケの強化選手を選抜しよう」（櫻井）

武田中学校のバスケットボール部は，部員数８名で活動している。次の大会に向けて，監督は８名のうち，試合に出る５名を選出し，残りの３名を控え選手としなければならない。下の表は，各選手の身長，最近１ヶ月の練習試合でその選手が決めた得点の合計，および，監督による評価(※1)をまとめたものである。
※1　監督による評価とは，監督がふだんの練習や練習試合等をみて，いくつかの観点について各選手を評価し，Ａ（優れている），Ｂ（ふつう），Ｃ（努力が必要）という３段階で記入したものである。

選手を選んだ理由については，後日，選手の保護者の前で説明しなければならない。そこで，監督は下の表にもとづいて選手を選ぶことにした。②③⑥の３名を選んだところで，あと２名を誰にするか決めかねている。あなたが監督であるとして，選手①～⑧のうち，どの２名を選手にするか①～⑧の記号で答えなさい。また，その２名の選手を選んだ理由について，保護者の前でどのように説明するか，実際に説明しなさい。

選手	身長	得点	監督による評価 ｽﾋﾟｰﾄﾞ	ｽﾀﾐﾅ	ｼｭｰﾄの うまさ	ﾃﾞｨﾌｪﾝｽ(守り)の うまさ	ﾐｽの 少なさ	部活動の 出席率
1	175	4	C	B	B	B	A	A
2	172	10	A	B	B	A	B	A
3	164	18	B	B	A	B	A	A
4	161	8	C	A	C	A	B	A
5	156	20	A	A	A	C	B	C
6	150	24	A	B	A	A	A	B
7	146	8	A	B	C	A	A	A
8	138	14	A	C	A	B	B	B

⑦　「アーリーランチコンクール」（関）

南中学校では，給食を早く食べ始められるようにするために「ランチ・コンクール」を行っています。1 学期は，給食を食べ始めた時刻を調べ，優勝クラスを決めました。

生活委員会では，来週，2 学期の「ランチ・コンクール」を行うことにしました。その際，1 学期とは異なる決め方で優勝クラスと準優勝クラスを決めることにしました。そして，給食を食べ始めた時刻だけでなく，4 時間目が移動や着替え(きがえ)に時間が必要な体育になっている曜日と，給食時間中のマナーの向上に目を向けるために給食時間中に立ち歩いた人数を調べることにしました。

下の表は，各クラスの生活委員が，一週間，記録した結果です。例えば，1 組の月曜日に記録されている「12：55」は，給食を食べ始めた時刻を表し，「2」は，給食時間中に立ち歩いた人数を表しています。また，表の中の◯は 4 時間目が体育の日を表しています。あなたは何組を優勝にしますか。また，準優勝は何組にしますか。

4 時間目が終わる時刻　12：40　　給食を食べ始める目標時刻　12：55

	1組		2組		3組		4組		5組	
月	12：55	2	12：54	0	13：06	2	12：48	3	12：55	0
火	12：58	1	13：03	1	12：52	3	13：02	2	12：50	2
水	12：50	1	12：58	0	12：50	0	12：51	3	13：01	1
木	13：02	2	12：52	0	12：48	2	12：55	0	12：56	0
金	12：51	0	13：00	1	12：49	4	12：54	2	12：58	1

⑧　「美化コンクール」（関）

ある中学校で美化コンクールが行われました。結果は次の表のようになっています。優勝，準優勝はどのクラスにするとよいでしょうか。

	１組	２組	３組	４組	５組
黒板	◎	△	◎	◎	△
黒板のさん	△	△	×	△	△
掃除用具入れの中	×	×	◎	△	△
ロッカーの上と中	○	◎	◎	×	△
机の並び	△	○	×	◎	△

⑨　「体育祭の優勝クラスは？」

【ver.1（関）】ある中学校で体育祭の予行練習が行われました。各種目の順位は以下の表の通りで，１位には５０点，２位は４５点，３位は４０点，４位は３５点，５位は３０点（失格は０点）が入ります。

	１組	２組	３組	４組	５組
100m走	1	3	4	2	5
全員リレー	2	失格	4	3	1
ムカデ競走	5	3	4	1	2
縄跳びリレー	5	2	4	1	3
選抜リレー	1	2	3	失格	4

予行練習が終わった後で,「１組はクラス全員で協力する種目であるムカデ競走や縄跳びリレーが最下位なのに，優勝するなんて，変だなあ。１組はただ足が速い人が多いだけじゃないか。」「４組はクラスで団結する種目（ムカデや縄跳び）が１位だったのに，準優勝もできないなんて，おかしいなあ」という意見がありました。

そこで，体育祭本番に向けて各種目で配点を変えて，協力できるクラス，団結力があるクラスが優勝できるようにしたいと考えました。どのような配点にすればいいですか。またその時の，優勝クラス，準優勝クラスはどこになりますか。

各種目の出場人数や，練習時間の目安は以下の通りです。

	出場人数	練習時間の目安
100m走	４人	朝練（個人練習）
全員リレー	クラス全員（３８人）	放課後練習２日間
ムカデ競走	クラス全員（３８人）	放課後練習１０日間
縄跳びリレー	３人×５組	朝練
選抜リレー	４人	朝練

※朝練は自由参加で７：３０～８：１０　　放課後練習はクラス全員参加で１時間

【ver.2（櫻井）】ある中学校では，学園祭の体育部門として，4 クラス対抗で 6 つの種目を行っている。目的は，クラスで協力して行う種目で，互いに競い合うことを通して，クラスの団結をはかり，他クラスとの交流を深めることである。それぞれの種目で順位をつけて 1 位が 50 点，2 位が 30 点，3 位が 20 点，4 位が 10 点というように得点をつけていく。最終的に，6 種目の合計得点で総合優勝を争う。下の表は今年の結果である。

	種目	1組	2組	3組	4組
1	大なわとび	50 (112回)	30 (78回)	10 (66回)	20 (70回)
2	障害物リレー	30 (5分32秒)	50 (5分02秒)	20 (5分34秒)	10 (5分40秒)
3	玉入れ	30 (56個)	20 (45個)	50 (72個)	10 (43個)
4	つなひき	20 (3位)	10 (4位)	30 (2位)	50 (1位)
5	ムカデ競走	20 (1分56秒)	30 (1分41秒)	10 (3分42秒)	50 (1分34秒)
6	全員リレー	20 (11分02秒)	10 (11分02秒)	50 (10分12秒)	30 (10分40秒)
	合計得点	170	150	170	170

※表の数値は，各種目の得点であり，（　）内は各種目の記録である。

全種目が終了したが，3クラスが同点優勝となった。賞状は3クラスに出すことにしたが，優勝カップは1つしかない。そこで，種目ごとの記録をもとにもっとも成績が良いクラスに優勝カップを渡すことになった。どのクラスがふさわしいといえるだろうか。

⑩　「日帰り温泉」（本田）

おさむさんは練馬区に住んでいます。休日，家族みんなで日帰り温泉に行くことになりました。練馬インターチェンジから関越自動車道にのって行く日帰り温泉旅行のプランを立てるようにとお父さんから言われました。おさむさんは，家族みんなが満足できるような旅行にしたいと思いました。

総合的に判断すると，どの温泉施設をおさむさんに勧めますか。

<u>おさむさんの家族</u>

父　会社員

車を運転するのが好きだからなるべく遠くに行きたいな。

母　小学校の先生

出費が心配，でもどうせ行くならなるべく人気のある温泉に行きたいわ。

おさむさん　中学2年生

正直言うと，家族と温泉に行くよりも友達とサッカーをするほうがいいんだけど。でも，どうせ行くなら温泉施設でなるべく長い時間を過ごしたいな。

妹　小学5年生

いろいろなお風呂のある温泉に行きたいな。

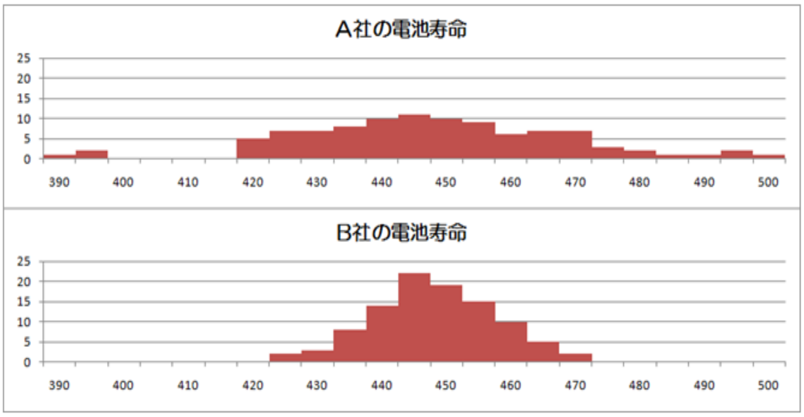
７つの温泉施設の比較

インターチェンジ名	練馬からの時間（分）	高速料金（円）片道	入浴料(円)		施設の特徴	人気ランキング(位)
			おとな	子ども（小学生まで）		
所沢	13	250	1950	1050	市街地に立地。プールも楽しめる。	6
川越	25	400	850	400	川越インターの近くに立地。 9種類のお風呂と3種類のサウナが楽しめる。	5
らんざんおがわ 嵐山小川	44	800	1280	640	大浴場や露天風呂など多彩なお風呂を楽しむことができる。	3
花園	50	900	1030	1030	都心から少し離れた場所、静かに広がる田園風景に立地。 天然の露天風呂をはじめ様々な温泉がある。	1
ほんじょうこだま 本庄児玉	72	1100	700	400	地下750mの古生層から湧水する本格的な温泉。	7
前橋	80	1400	500	300	見晴らしのよい露天風呂と広々とした大浴場が楽しめる。	2
しぶかわいかほ 渋川伊香保	89	1500	600	300	群馬・長野県境部に立地。 総檜造りの大浴場と、森に面した露天岩風呂。	4

⑪　「A 社と B 社の電池の稼働時間（電池寿命）」（青山）

電池を作っている電器メーカーのA社とB社は，来週行われる大きな取引のライバル会社です。もしここで取引が決まれば売り上げがかなり伸びるので，どちらの会社でも準備に大忙しです。A社の電池とB社の電池は値段がほぼ同じなので，特に決め手にはなりません。

そこで，A社とB社の電池 100 個ずつの稼働時間（電池寿命）についてまとめた次のデータを元に，どちらの会社も性能の良さで売り込むことに決めました。



	A 社	B 社
平均	447.9	448.1
最頻値	445	445
中央値	447	448
最小値	391	423
最大値	501	472
範囲	110	49

（単位：時間）

（5 時間ごとの度数をまとめたヒストグラム）（※例えば 440 の階級には，437.5～442.5 のデータが入っています）

(1) A社はどのように売り込めばいいと思いますか。

(2) B社はどのように売り込めばいいと思いますか。

⑫　「ガソリンの割引カード」（浜田）

下図のように道路をはさんで，２つのガソリンスタンド店がある。昨日までA店，B店ともに 140 円／㍑でガソリンを販売していたが，A店は 120 円／㍑に値下げをした．そこで，B店はガソリン割引カードをお客に配布して使ってもらうことにした。

A 店

B 店

Chance！とある③⑥⑨⑫の 3 回目，6 回目，9 回目，12 回目の給油でガソリンの値段の割引が行われる。また，このカードは 1 回につき 20㍑以上給油しなければ，このカードは使えない。また，このガソリン割引カードの値引きは，3 回目と 6 回目の給油のときが 2 円引き，9 回目が 3 円引き，12 回目が 5 円引きである。

Ａ店とＢ店では，どちらが安く給油できるだろうか。

⑬　「モノレールの料金比較」（西村）

たつやさんは，「多摩都市モノレール」をいつも利用しています。多摩都市モノレールより後に開業した，「舎人（とねり）ライナー」の運賃表を見たたつやさんは，多摩都市モノレールより料金が安いと感じました。そこで，「多摩都市モノレール」の運賃の値下げを求める提案をしようと考えました。

あなたはたつやさんの同級生です。説得力のある提案になるように，たつやさんに具体的にアドバイスしましょう。

多摩都市モノレール

駅名	営業キロ（km）	運賃（円）
上北台	0	
桜街道	0.7	100
玉川上水	1.5	200
砂川七番	2.5	200
泉体育館	3.0	200
立飛	3.6	250
高松	4.2	250
立川北	5.4	300
立川南	5.8	300
柴崎体育館	6.5	300
甲州街道	8.0	350
万願寺	9.3	350
高幡不動	10.5	400
程久保	11.3	400

舎人ライナー

駅名	営業キロ（km）	運賃（円）
日暮里	0	
西日暮里	0.7	160
赤土小学校前	1.7	160
熊野前	2.4	220
足立小台	3	220
扇大橋	4.1	270
高野	4.6	270
江北	5.2	270
西新井大師西	6	270
谷在家	6.8	270
舎人公園	7.7	320
舎人	8.7	320
見沼代親水公園	9.7	320

⑭　「どの会社に就職するか」（山口）

4 つの会社が，次のような社員広告を出しています。

（Ａ社）　アルバイト募集，時給 910 円

（Ｂ社）　アルバイト募集，日給 7,300 円

（Ｃ社）　正社員募集，月給 12 万円，ボーナス 2 か月分，
　　　　　昇給　年 1 回　月額 3,000 円

（D社）　正社員募集，月給 10 万円，ボーナス３か月分，
　　　　　昇給　２年に１回　月額 10,000 円

どの会社の場合も，１日に働く時間や１か月に働く日数について，いろいろと相談することができます。あなたなら，どの会社への就職を希望しますか。その理由も説明しなさい。

⑮　「バレーボールの勝敗」（久保）

6 人制のバレーボールの試合は，2 つのチームが 4 セットの試合を行い，先に 3 セットをとったチームが勝ちとなります。ただし，両方のチームが 2 セットをとった場合は，5 セット目を行います。それぞれのセットは，25 点ですが，5 セット目だけは 15 点になっています。（セットの勝敗は，先に 25 点か 15 点をとったチームが勝ちとなりますが，同点の場合は，連続して 2 点をとる必要があります。）

次に示す新聞記事は，2010 年（平成 22 年）12 月 19 日に行われた全日本選手権の準決勝の結果を示したものです。男子は，「JT」と「サントリー」が，女子は「デンソー」と「東レ」が決勝に進んだことがわかります。（略）

ところで，スポーツの中には，勝敗を決めるときに，バレーボールのように，いくつのセットをとったかで勝敗が決まるものと，野球やサッカーのように，得点の合計で勝敗が決まるものがあります。

新聞記事の試合で，おしくも敗れてしまったチームに対して，次のような“はげましの言葉”をおくったとします。

「試合には勝てなかったけれど，得点の合計では，みなさんの方が多くの点をとったのだから，みなさんの方が実力は上ですよ！」

このはげましの言葉について，あなたはどのように考えますか？

5.2.2　最適な状態を考える場面

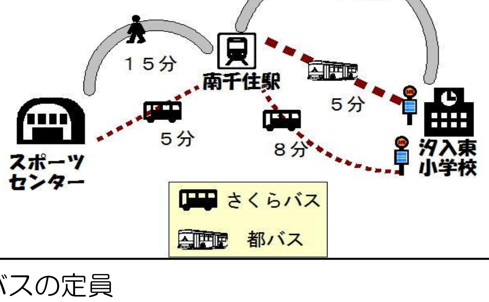
選択肢が非明示的で，自ら選択肢をつくり，判断する場面である。最適なルートやスケジュールを考える場面，何かを分配する場面に関わる教材を多く開発した。

ルートやスケジュール

⑯　「伝統技術展の見学への移動方法を決めよう」（柴田）

４年生全員で，伝統技術展の見学へ行きます。どうやって行けばいいのでしょう。

伝統技術展へ行こう！
○日時：７月
○場所：荒川スポーツセンター
○人数：４年生　１０６人



バスの定員
都バス：70 人乗り（うち座席 25 名分）
さくらバス：30 人乗り（うち座席 15 名分）
※学校割引で料金はどちらも同じ

⑰　「修学旅行のルートを決定しよう」（浜田）

《 来年の修学旅行計画書 》

来年の大宮東中学校の修学旅行３日目は，班ごとに半日タクシーで京都市内にある世界文化遺産に登録されている 17 の有名な寺社等を，なるべくたくさん見学することにしました。そこで，多くの生徒が見学すると考えられる７カ所を選びました。なお，宿泊する旅館は，南禅寺から徒歩３分の所にある旅館なので，出発地点は南禅寺にします。到着地点は，新幹線に乗るために京都駅とします。

修学旅行計画書に示したように，タクシーを使って半日でなるべくたくさんの世界文化遺産を見学することにしました。見学しようと選んだ場所は，【金閣寺】【天龍寺】【清水寺】【銀閣寺】【二条城】【東寺】【上賀茂神社】の７ヵ所で，出発地は南禅寺，到着地は京都駅です。

京都移動時間早見表

	天龍寺	金閣寺	二条城	上賀茂神社	銀閣寺	南禅寺	清水寺	京都駅
清水寺								２０
南禅寺							１５	３０
銀閣寺						５	２０	４０
上賀茂神社					２５	２５	３０	４０
二条城				１５	２０	２０	２５	２５
金閣寺			１５	１５	３０	３５	３５	３５
天龍寺		２０	２０	２５	４５	４５	５０	３０
東寺	２５	２５	２５	３５	４０	３５	２０	１０

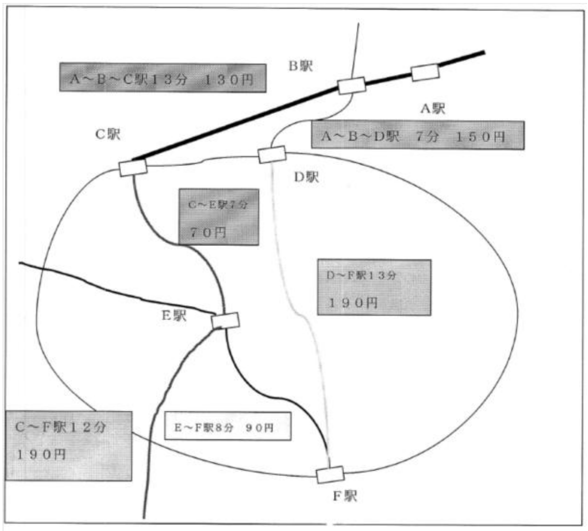
(1) 来年の修学旅行に行く後輩のために見学ルートのプランをつくってください。

(2) 7 ヵ所全てを見学するルートは，つくれないことがわかりました。それでは，来年の後輩のために，改めて見学プランをつくってください。

⑱　「どの電車を使うかな」（島田）

あきらさんの家族は，日曜日に，A 駅から電車に乗って，F 駅まで行き，F 駅の近くにある遊園地に遊びに行きます。どの線を通っていけばよいでしょうか。

ただし，乗り換えをするときには５分かかります。また，同じ太さの線や同じ色の線は，同じ路線（電車）を表しています。



⑲　「24 時間列車の旅」（久保）

2011 年(平成 23 年)9 月 24 日の北海道新聞(朝刊)の記事である。「24 時間以内に列車で移動できる距離の記録」における新記録達成を報じたもので，ギネスブックへの申請についても触れている。

「東京のトラベルライター白川淳氏(47)が，9 月 22 日に北海道の稚内駅から鹿児島県の鹿児島中央駅まで，23 時間 57 分かけて 3072.4 ㎞を移動した。当初は 3 月 11 日に出発する予定であったが，東日本大震災のため，東北新幹線のダイヤの完全復旧(9 月 23 日)を踏まえて 9 月 22 日に出発した。稚内駅から鹿児島中央駅まで，7 本の列車を乗り継いで新記録を達成したが，この試みは従来も，新幹線網が発達し列車の運行が正確な日本で生まれてきている。これまでの記録は，2009 年 11 月に日本在住のアメリカ人が，北海道の天塩中川から鹿児島中央駅までの 2969.5 ㎞だった。」

(1) これを達成するには，どのようなことを考えなければならないか。
(2) 3 月 11 日の出発を断念したのはなぜか。
(3) 東北新幹線の復旧(9 月 23 日)の前日(9 月 22 日)に稚内を出発したのはなぜか。
(4) 2009 年の記録とは何が違うのか，また，何が同じか。
(5) 同様なこと(24 時間で移動すること)で，新たな記録は作れないか。列車に限定せず，飛行機や船なども使って 24 時間で，どれくらい移動できるか。

⑳　「臨時列車とダイヤグラム」（櫻井）

花火大会のために，平常のダイヤに加えて，臨時列車を増発したいと思います。できる限り多くの人を早く運びたいので，臨時列車として，甲府駅～市川大門駅を直通で走る特急「ふじかわ」を考えたいと思います。どのようなダイヤで運行すればよいでしょうか。

上り

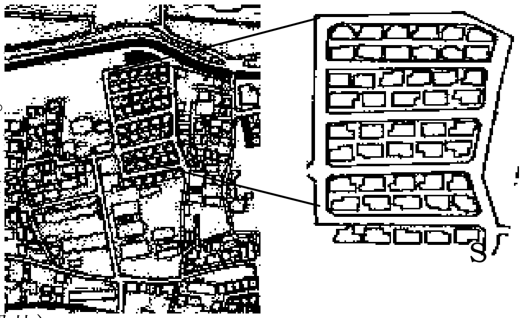
駅名	営業距離(km)		☆1	ふじかわ12号	☆2	☆3	☆4	☆5	ふじかわ14号	☆6
甲府	0	発	16:12	16:41	16:47	17:15	17:41	18:23	18:43	18:53
金手	1.2	着	16:14		16:49	17:17	17:43	18:25		18:55
		発	16:14		16:49	17:18	17:44	18:25		18:55
善光寺	2.1	着	16:16		16:51	17:19	17:45	18:28		18:57
		発	16:17		16:52	17:20	17:46	18:28		18:58
南甲府	4.4	着	16:20	16:45	16:55	17:23	17:49	18:30	18:48	19:01
		発	16:21	16:46	16:57	17:27	17:52	18:33	18:48	19:03
甲斐住吉	5.3	着	16:22		16:59	17:29	17:53	18:35		19:05
		発	16:23		16:59	17:29	17:54	18:36		19:06
国母	7.2	着	16:25		17:02	17:32	17:56	18:38		19:08
		発	16:26		17:02	17:32	17:57	18:39		19:08
常永	9.5	着	16:29		17:05	17:35	18:00	18:41		19:11
		発	16:30		17:06	17:36	18:00	18:42		19:12
小井川	10.9	着	16:32		17:08	17:38	18:02	18:44		19:14
		発	16:32		17:08	17:38	18:03	18:45		19:14
東花輪	12.1	着	16:34	16:53	17:10	17:40	18:05	18:46	18:56	19:16
		発	16:38	16:54	17:13	17:44	18:06	18:47	18:57	19:16
甲斐上野	15.6	着	16:42		17:17	17:48	18:09	18:51		19:20
		発	16:43		17:17	17:49	18:15	18:51		19:23
芦川	16.7	着	16:45		17:19	17:50	18:18	18:53		19:25
		発	16:46		17:20	17:51	18:18	18:54		19:25
市川本町	17.7	着	16:47		17:22	17:52	18:20	18:55		19:27
		発	16:48		17:23	17:53	18:21	18:56		19:27
市川大門	18.6	着	16:50	17:01	17:24	17:54	18:22	18:57	19:03	19:29

下り

駅名	営業距離（km）		☆A	☆B	☆C	ふじかわ9号	☆D	☆E	☆F	☆G
甲府	0	着	16:29	17:05	17:35	17:57	18:17	18:40	19:12	19:52
金手	1.2	発	16:27	17:03	17:33		18:15	18:38	19:09	19:50
		着	16:26	17:03	17:33		18:14	18:38	19:09	19:50
善光寺	2.1	発	16:24	17:01	17:31		18:13	18:36	19:07	19:48
		着	16:24	17:00	17:30		18:12	18:36	19:06	19:48
南甲府	4.4	発	16:21	16:57	17:28	17:52	18:09	18:33	19:03	19:44
		着	16:16	16:57	17:26	17:51	18:08	18:32	19:03	19:44
甲斐住吉	5.3	発	16:14	16:54	17:24		18:07	18:30	19:01	19:42
		着	16:13	16:53	17:24		18:06	18:30	19:00	19:41
国母	7.2	発	16:11	16:51	17:22		18:04	18:27	18:58	19:39
		着	16:10	16:46	17:21		18:03	18:27	18:57	19:36
常永	9.5	発	16:08	16:43	17:18		18:00	18:24	18:54	19:33
		着	16:07	16:42	17:17		17:58	18:23	18:52	19:33
小井川	10.9	発	16:05	16:40	17:15		17:56	18:21	18:50	19:31
		着	16:04	16:39	17:15		17:55	18:20	18:49	19:30
東花輪	12.1	発	16:02	16:37	17:13	17:43	17:53	18:18	18:47	19:28
		着	16:01	16:36	17:12	17:43	17:53	18:18	18:43	19:27
甲斐上野	15.6	発	15:57	16:32	17:08		17:49	18:14	18:39	19:24
		着	15:55	16:32	17:07		17:46	18:13	18:38	19:22
芦川	16.7	発	15:53	16:30	17:06		17:45	18:11	18:37	19:21
		着	15:52	16:29	17:05		17:44	18:11	18:36	19:20
市川本町	17.7	発	15:50	16:27	17:03		17:42	18:09	18:34	19:19
		着	15:50	16:27	17:02		17:42	18:09	18:33	19:18
市川大門	18.6	発	15:48	16:25	17:01	17:36	17:40	18:07	18:32	19:17

㉑　「年賀状の配達」（浜田）

高校生の太郎君は，年賀状を配達するアルバイト
ています。右の地図の地区を太郎君は担当していま
なお，太郎君は，自転車で年賀状を配達しています。
右のブロックでは，太郎君はＳの位置から配達し
ます。なるべく早く配達するには，どのように配達
ばよいでしょうか。



㉒　「信号のある大通りと信号のない裏道の選択」（櫻井）

車でＡ地点からＢ地点まで行くのに，さまざまな経路が考えられます。信号のある大通り（武田通りと山手通り）を走ると 100m を８秒で進むことができます。大通りではなく路地を走ると，信号を避けることはできますが，100m を 10 秒とやや遅くなります。どのような経路で行くのが最も早く着くと言えるでしょうか。

㉓　「千羽鶴」（久保）

あなたのクラスでは，「千羽鶴」をつくることになりました。学校の休み時間だけを使って折るとすると，折り紙で 1000 羽の鶴を折るのに，何日かかるでしょうか。

分配

㉔　「大玉送りの配点」（室谷）

今日は学年対抗のスポーツ大会です。１，３，６年生チーム対２，４，５年生チームが大玉送りをして，１，３，６年生チームが勝ちました。勝ったチームは 150 点もらえます。150 点を１，３，６年生で分けて，各学年の得点に加えます。

点数の分け方について，みんなに説明をします。あなたはどんな分け方をして，どのように説明しますか。

㉕　「遠泳場所を決めよう」（室谷）

夏休みに下田臨海学園に行きます。２つの学校が合同で参加します。人数確認などを考えて，遊泳場所を学校ごとにわけて活動しようと相談しましたが，それぞれの場所をどれくらいにしようか悩んでいます。今回参加する２つの学校については下の表のようになっています。どのように遊泳場所をわけるか考えましょう。

	人数	班の数	泳力別			
			泳げない	泳力が低い	25ｍを泳げる	泳力が高い
A 小	75 人	8 班	4 人	15 人	31 人	25 人
B 小	60 人	6 班	8 人	12 人	30 人	10 人

㉖　「水の分配」（本田）

あなたに，国際支援機関から，水不足に悩むアルジェリア，ヨルダン，トルコの３か国へ「水」を公平に分配するという任務が与えられた。どのように分配すればよいだろうか。

国	人口（百万人）	農業における経済活動人口（万人）	面積（㎢）	耕地面積（㎢）	１年間に利用可能な水（㎦）
アルジェリア	35	316	2,381,740	84,350	12
ヨルダン	6	12	89,320	2,830	1
トルコ	72	817	783,560	242,940	214

㉗　「スポーツ飲料」（西村）

あきらさんの学校は，スポーツ飲料「ポカリウス」の粉末を 600 袋もらいました。これを夏休みに活動するクラブに分けることにしました。

夏休みに活動するクラブの人数と活動日数は，下の表の通りです。あなたなら，それぞれのクラブに何袋ずつ分けますか。

クラブ	人数	活動日数
バスケットボール	20	14
サッカー	50	12
テニス	30	18

クラブ	人数	活動日数
バドミントン	15	8
合　唱	25	24
理　科	10	24

㉘　「2 人の勝負の賞金の分け方」(本田)

A くんと B くんがテニスの試合をしている。3 セットを先取したほうが勝ちになるが，A が 2 セット，B が 1 セット取ったところで雨が降ってきたので試合を中止しなくてはならなくなった。勝ったほうには賞品としてテニスボールが 1 ダース（1 2 個）用意されていた。賞品のテニスボールをどのように分ければよいか。

㉙　「草むしりのお駄賃」(島田)

兄（12 歳）と弟（10 歳）は庭の草むしりのお手伝いをしました。兄と弟が働いた時間と草むしりをした面積は下のようになりました。

兄：午後 1 時～午後 3 時　30 ㎡

弟：午後 1 時～午後 2 時　10 ㎡

お手伝いをしたので，お父さんから，あわせて 3000 円をいただきました。二人はこのお金をどのように分ければよいか悩んでいます。いくらずつに分けるとよいでしょうか。

㉚　「割り勘」

【ver.1（島田）】お友達の家族（母とお友達）と私の家族（母と私）で 1 台のタクシーに乗り，順に家をまわって遠い私の家族（母）がタクシー料金 3600 円を払いました。お友達のお母さんは，降りるときに「タクシー代は後で払いますから，いくら払えばよいか後で教えてください。」と言いました。私は，タクシーの料金をお友達のお母さんにいくら請求すればよいか考えてしまいました。

ただし，タクシーに乗った総距離のおよそ半分行ったところで，お友達の家族は降りました。いくら請求すればよいかを色々考えてみましょう。また，そう考えた訳も書いてください。

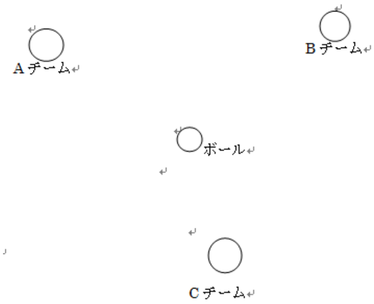
【ver.2（西村）】「N 船社」は台湾の A 社，香港の B 社から別々に依頼され，神戸から，中古車を運搬する。A 社，B 社，N 船社の社員となり，運搬料について交渉し，契約をしなさい。

その他

㉛　「市民運動会での新しい競技をつくろう」（久保）

太郎さんの町では，市民運動会の新しい競技をつくろうとみんなで話し合っています。これまでの話し合いで，次のことまでは決まりました。

「A チーム（小学生チーム），B チーム（中学生チーム），C チーム（お父さんお母さんチーム）の 3 つのチームで戦う。3 チームがそれぞれ下の図のように円形の陣地に集まり，そこから審判の合図で，中ほどの円の中に置いてあるボールを 1 個ずつ取りに行き，陣地にボールを運ぶ。たくさんボールを運んだチームが勝ちとなる。」

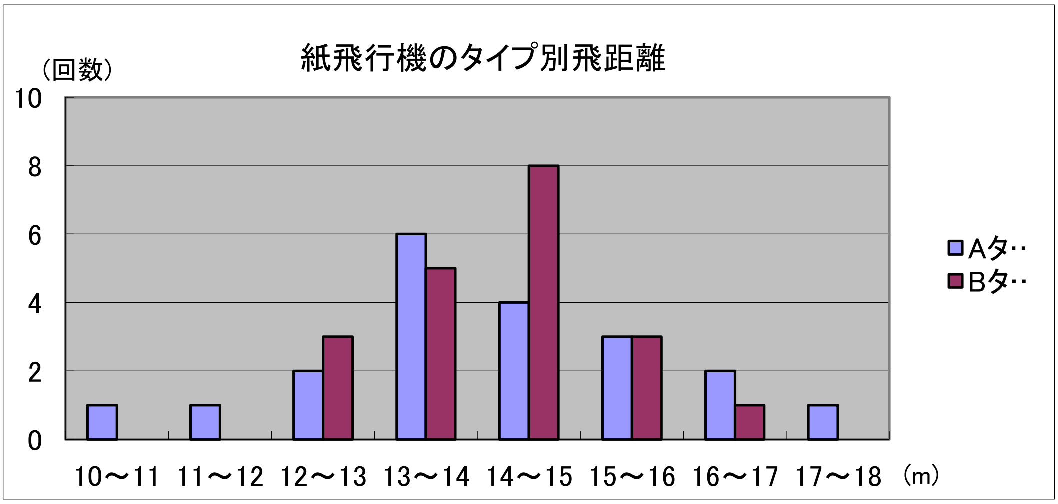


話し合いは順調に進んでいますが，ボールを置く場所をどこにすればよいかが問題になっています。ボールを置く場所はどのように決めればよいのでしょう。

㉜　「クラス対抗での紙飛行機の飛行距離を競う大会」（青山）

たけし君の学校では，来月，クラス対抗で紙飛行機の飛行距離を競う大会が行われます。たけし君のクラスでは，大会で使う紙飛行機の折り方についてみんなで考え，最終候補として，ＡタイプとＢタイプが残りました。

それぞれのタイプの紙飛行機を 20 回ずつ飛ばした飛行距離をまとめたものが下のグラフです。たけし君はクラスのリーダーとして，この結果に基づいてどちらのタイプの紙飛行機を使うか決めなくてはなりません。



(1) たけし君はどちらのタイプの紙飛行機を選ぶべきでしょうか。

(2) 昨年行われた大会で優勝した紙飛行機の飛行距離が，15m80cm だったとするとどちらのタイプの紙飛行機を選ぶべきでしょうか。

㉝　「M サイズのコーヒーはいくらにする？」（島田）

ある喫茶店で，こんど，M サイズ（350mL）の珈琲を出すことにしました。今まで売っていた S

サイズ（240mL）は 300 円（税込み）です。原価率（電気代，水道代，コーヒー豆代，ミルク代，砂糖代，人件費，場所代などの必要経費）は，値段の 30%にあたります。それ以外はもうけになります。

あなたが経営者だとしたら，M サイズのコーヒーの値段を何円にしますか。

㉞ 「どの大きさのサンダルを生産する？」（室谷）

これから夏に向けてビーチサンダルを 1000 足生産開始します。5 つのサイズのサンダルを作りますが，どれだけ生産すればよいかがわかりません。できるだけ売れ残りや不足がないように販売するためにはどのサイズのものをどれだけ生産すればよいでしょうか。

	サイズ（cm）		サイズ（cm）		サイズ（cm）		サイズ（cm）
1	25	26	20	51	24	76	20
2	24	27	26	52	26	77	26
3	21.5	28	23.5	53	27.5	78	23.5
4	27	29	24	54	22	79	23
5	23.5	30	25.5	55	25	80	26
6	26	31	25.5	56	25	81	27
7	23	32	24	57	25	82	22
8	22.5	33	22.5	58	24	83	25
9	25.5	34	27	59	26.5	84	23.5
10	23	35	26.5	60	21.5	85	25.5
11	23.5	36	18.5	61	24	86	24.5
12	24	37	21.5	62	20	87	23.5
13	24.5	38	24.5	63	24	88	27
14	24	39	26.5	64	23.5	89	25
15	24.5	40	23	65	27	90	17.5
16	22	41	23	66	27	91	23.5
17	25	42	22.5	67	24.5	92	18
18	26.5	43	23.5	68	23.5	93	25.5
19	27	44	27	69	23.5	94	23.5
20	30	45	20	70	27	95	22.5
21	25	46	22.5	71	22	96	23.5
22	25	47	23.5	72	22	97	21
23	24	48	25.5	73	23.5	98	23.5
24	24	49	24	74	23.5	99	27
25	25	50	23	75	24	100	21

㉟ 「ドラッグストアの割引カード」（浜田）

太郎君の家から歩いて 5 分の所に薬アイジョーがあり，太郎君はそこでよく買い物をしています。

ところがこの 6 月に自転車で 30 分の所に新しく薬ヤスモトが開業しました（**図 1**）。2 軒のドラッグストアは，8 月に向けた還元大安売りで割引カードを配りました。太郎くんのところにも**図 2** と**図 3** の 2 種類の値引きカードが郵送されてきました。

薬アイジョー　　太郎君の家

図 1［地図］　　薬ヤスモト

薬アイジョーは家から近いし，これまですべてそこで買い物をしていたので，太郎くんは薬アイジョーにしようかなと思いましたが，薬ヤスモトの割引カードも魅力的に思えました。家から少し遠いけれど，薬アイジョーより安くなるなら，行ってもいいなとも思いました。

(1) 太郎くんは，どちらのお店で買い物をした方が得でしょうか。チラシを見ながら考えてください。

(2)「薬ヤスモト」に対抗して「薬アイジョー」では支店長会議を開いて，現在の割引カードを新しく作り替えることにしました。どのように作り替えれば，お客様が「薬アイジョー」に来てくれるようになるでしょうか。支店長会議を開いて対策を考えてください。

図 2［薬ヤスモト］

図 3［薬アイジョー］

5.3　本章のまとめ

5.1 に挙げた３つの条件

a.　子どもたちの様々な価値観が表出される

b.　子どもが，互いに考えを伝え合ったり，吟味したりしながら判断する必要性を感じる

c.　多様なアプローチが可能で，オープンエンドである

を満たす問題を開発した結果，5.2 に示したように，おおむね「優劣や順位を付ける場面」「最適な状態を考える場面」に分類することができた。この分類は，開発した後で分類した結果であるが，数学的判断力の育成の初期段階で，授業でどのような問題を扱うとよいかを考えたことが反映されたとも言える。すなわち，小学生や中学生が，算数・数学を使って判断しようとする，あるいは，判断できる場面には，「優劣や順位を付ける場面」や「最適な状態を考える場面」が多いと言えよう。したがって，このような場面を探すことは，新たな問題を開発する際の視点になると考える。

もうひとつの特徴は，これらの問題は，子どもと問題場面との「距離」を除けば，どの学年でも扱うことが可能であるという点である。このことからは，問題の構造は変えずに，問題場面を，対象の子どもに近いものに変えるという発想で新たな問題が開発できることが示唆される。5.2 の問題のいくつかは，実際に，そのようにして開発されたものである。

数学的判断力の育成を図る教材は，「優劣や順位を付ける場面」「最適な状態を考える場面」に限定されるものではない。他の場面に関する問題を開発することが今後の課題として残されている。

次章では，開発した問題を用いた授業実践について示し，子どもの思考の様相をもとに，これらの問題の有効についても検討することにする。

第６章　数学的判断力を育成する授業

第 2 章に示した「数学的判断力に関する枠組み」に基づいて，第 5 章に示した教材を用いて授業を行った。小学校 4 事例，中学校 5 事例，高等学校 1 事例について，それぞれの授業の実際を示すとともに，得られた成果と課題を述べる。また，本章の最後には，「現実世界の問題」の取扱いという視座から考察を加える。

6.1　授業の特徴

本科研研究では，「数学的判断力の育成」を授業で具体化するために，さまざまな視点から検討を加えた。「数学的判断プロセスの枠組み」などの理論面の検討や，児童・生徒の実態についての調査研究などについては，本報告書の中で示した通りであるが，本節では，授業化に向けた科研メンバーの取り組みについて簡単にまとめておく。

私たちは，社会的文脈における数学的判断力について考察するにあたり，当初は，イギリスの『Bowland Maths. 』を参考にし，数学的判断プロセスの検討に加え，「ルーブリック」の重要性について検討した。そこでは，イギリスのナショナルカリキュラムに基づき，「表現」「分析」「解釈と評価」「コミュニケーションと振り返り」が観点になっており，数学的判断プロセスの検討に参考になると考えた。また，「ルーブリック」は，「パフォーマンス評価」で示されている教育方法学の研究でも強調されており，授業化に向けては「パフォーマンス課題」にも着目した。

このような多方面の研究から示唆を得て，児童・生徒を対象とする調査研究と並行して，数学的判断力の授業化に向けて科研メンバー全員で教材についての提案がなされていった。　ここで検討された教材は，第 5 章で示した通りであるが，これらの検討を通して，メンバーの共通認識がなされることになった。例えば，本研究における「現実世界の問題」は，現実そのものの事象やデータではなく，フィクションを含むことにした。それは「文脈依存型」の教材にすること，すなわち，子どもたちの様々な価値観が表出され得る文脈を設定することを重視したからである。

このような点からは，本科研の授業化に当たっては，これまで算数・数学の問題としては「ノイズ」として排除されてきた点にも焦点を当てることが重要であるといったことが議論された。また，どのような「立場」で判断させるのかも検討された。例えば，その問題の解決が，自分のためになされるのか，他者のためになされるのか，あるいは社会の一員としてなされるのか，また，問題を解決する立場として，一方向からの検討か，それとも，立場の異なる複数の方向からの検討か，といったことである。

さらに，「数学的判断力の育成」では，選択肢を創出してこれを選択していく活動が重要であるが，授業では，この活動は個別に行うのか，あるいは，「練り上げ」をして，学級としての意志決定をするのか。この点も，大きな検討課題となった。

本科研研究の軸となる「数学的判断プロセスの枠組み」には，理論構築，調査問題の検討，分析を経て，このような授業化を視野に入れた検討からも修正が加えられたのである。

本章では，以下の 10 の授業実践を示す。

6.2　「伝統技術展への行き方を考えよう」〔小学校〕（柴田）
6.3　「的当て」〔小学校〕（島田）
6.4　「走り幅跳びの代表選手を選ぼう」〔小学校〕（室谷）
6.5　「自動販売機の設置場所を考えよう」〔小学校〕（室谷）
6.6　「交通事故を減らそう」〔中学校〕（本田）
6.7　「水の分配」〔中学校〕（本田）
6.8　「バスケットボールの選手を選ぼう」〔中学校〕（櫻井）
6.9　「修学旅行のルートを決定しよう」〔中学校〕（浜田）
6.10　「どちらのドラッグストアが得かな」〔中学校〕（浜田）
6.11　「ポカリウスを分配しよう」と「走り幅跳びの代表選手を選ぼう」〔高等学校〕（小澤[16]）

これらの授業実践の報告では，「数学的判断プロセス」について明確化されている。それらを整理すると，次ページの表 6-1 の通りである。

「A：プロセス能力」では，「A1：定式化」にすべての授業が該当した。なお，表 1 では，特に該当するものについて〇を付している。

「B：数学の内容」では，多くが「B1：代数的」，「B-4：統計的」であるが，これは一意的に定まるものではなく，生徒の発想，考え方，反応によっては，複数の内容と関連し合っていると捉えられる。「C：選択支援」についても，同様に，教材の内容，場面に依存すると考えられる。

「D：社会的価値」については，授業構築の段階では該当しない項目であっても，授業における児童・生徒の反応によって，授業後の検討において該当する項目が増えた授業もあった。例えば，「D-3：責任性・自律性」では，授業において児童・生徒が自分の考えを，個人の価値観の枠を越えて，他者を納得させるための根拠を以て示そうとする姿が多く見られたこともあり，ほとんどの授業が該当するに至った。

以下では，先に，各授業の概要をまとめておこう。なお，高等学校の「走り幅跳び」については，小学校と共通する教材であることから，本節では，小学校における実践（6.4）に含めて述べることにする。

（1）伝統技術展への行き方を考えよう〔小学校〕（6.2）

この授業は，「問題に対して自分なりの価値観をもって判断し，与えられた問題を解決する」ことを目標としている。

伝統技術展の会場までの行き方のプランを，子どもの身近にある実際の生活の中から考察させるが，下級生（3 年生）のために会場までの行き方のプランを立てるという問題設定

[16] 他の科研メンバーにおける授業とは別に，筑波大学附属坂戸高等学校の小澤真尚先生のご協力を得て，調査問題で用いた 2 つの課題（「ポカリウスの分配」・「走り幅跳び」）の授業を高等学校で実践していただいた。

表 6-1　各授業における数学的判断プロセス

学校種	小　学　校				中　学　校					高校
タイトル	6.2 伝統技術展	6.3 的当て	6.4/11 走り幅跳び	6.5 自動販売機	6.6 交通事故	6.7 水の分配	6.8 バスケット	6.9 修学旅行	6.10 ドラッグストア	6.11 ポカリウス
授業者	柴田	島田	室谷	室谷	本田	本田	櫻井	浜田	浜田	小澤
A：プロセス能力										
A-1：定式化	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
A-2：数学的表現	○		○		○	○		○	○	
A-3：数学的推論・分析	○		○	○	○	○	○	○	○	
A-4：解釈・評価	○		○	○	○	○		○	○	
A-5：数学的コミュニケーション	○		○	○	○	○	○	○	○	○
A-6：数学的・社会的価値認識	○		○	○	○	○	○	○	○	○
B：数学の内容										
B-1：代数的	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
B-2：図形的								○		
B-3：関数的									○	
B-4：統計的			○	○	○	○	○			
C：選択支援										
C-1：シミュレーション	○			○	○		○	○	○	
C-2：指標・指数		○	○			○	○			○
C-3：評価式						○	○			○
C-4：確率・統計的推測			○	○	○			○		
D：社会的価値観										
D-1：公平性・公正性・平等性	○	○		○	○	○	○			○
D-2：多様性・多面性・協調性	○			○	○	○	○		○	
D-3：責任性・自律性	○		○	○	○	○	○	○	○	○
D-4：持続性・恒常性・一般性			○		○					
D-5：効率性・有限性			○		○			○		
D-6：快楽性・愉悦性			○					○		

に工夫がある。ここには，学習者である 4 年生自身を対象とする場面で考えさせると，選択肢の創出や選択において，個人の価値観などが影響し，自分の考え方に固執して考えの深化がなされないであろうという授業者の思いが表れている。私たちが目指す数学的判断力の育成では，このような問題場面の設定が重要であると考えている。

また，自分が作成したプランに「キャッチフレーズ」を付けて提案書をつくるということも，本授業の特徴の一つである。自分の考えのよい面を他者に納得させる上で，何がそのプランの“売り”なのかを「キャッチフレーズ」を用いて表現することになる。

プロセス能力は，A-1～A-6 のすべてに該当する。また，選択支援では，C-1（シミュレーション），社会的価値観では，D-1（公平性・公正性・平等性），D-2（多様性・多面性・協調性），D-3（責任性・自律性）に該当する。

また，授業者は，授業前の児童の実態について，多くの児童はプロセス能力の水準 1（自己限定的）であると捉えている。日々の授業では，考えの視点や方法を与えて問題を解決することがほとんどであることがその要因であると捉えているが，授業者と児童の関係は極めて良好であり，また，児童が積極的に発言し，教師と交流する良好な教室文化が形成されていることから，水準 2（多様性の萌芽），さらには水準 3（社会的）へと変容する児童の姿が期待できた。

授業の実際では，当初は児童の戸惑いが見られたものの，新たな情報（例えば，時刻に対する情報）の必要性を求める発言や，実際の生活に照らして何に目を向けなければならないか（例えば，バスの運行状況）が検討されていった。これは，授業者も指摘しているように，水準 1 から水準 2 への変容であると捉えられる。このような活動を通して，選択肢が創出されていくことになる。

その後，プランの評価と修正の場面に移っていくが，“売り”の根拠を数学的に説明することや，自分のプランを友だちの提案と比較して評価するといった段階までには至らなかった面もあったが，他者との交流の中から，自分の価値観を踏まえながら，友だちの考え方に目を向けて提案書を作成する児童の姿が随所に確認できたと捉えられる。

（２）的当て〔小学校〕(6.3)

この教材を用いた授業は，日本数学教育学会誌（算数教育）にも掲載されているもので，これまでにもさまざま視点からの検討がなされているものである。問題場面は，文化祭のイベントとして「的当てゲーム」を行うという文脈において，これに参加した 1 年生の児童の得点をどのように決定するかということを考える問題である。

ある児童の「的当てゲーム」の状況が示されているが，2 点と 1 点の境界線上（円周上）のものを 2 点とみなすのか 1 点とみなすのか，また，参加者が学習者（4 年生）より下級生の 1 年生の児童であるという設定も，授業者が強調する「平等・公平の価値観」や「思いやりの価値観」に関係している。

プロセス能力は，A-1（定式化），数学の内容は，B-1（代数的），選択支援は，C-2（指標・指数），社会的価値は，D-1（公平性・公正性・平等性）が該当し，他の実践に比べて，該当する小項目が少ないことが特徴として挙げられる。これは，この授業が，本科研研究で設定した授業の枠組みに当てはめた場合，極めて基本的な形になっているからであると捉えられる。ただし，授業者の報告では，授業者が設定した小項目以外でも，授業後の児童の活動の分析から，A-6（数学的・社会的価値認識）において水準 3 に近づいた児童がいたことが指摘されている。また，コミュニケーションなどの相互作用によって，水準を高まった児童の存在も確認されている。

（３）走り幅跳びの代表選手を選ぼう〔小学校；高等学校〕(6.4；6.11)

この授業は，複数の選択肢の中から，与えられた条件を基にして，選択肢の一つを様々な価値

観から選択させるものである。また，この問題は，類似の内容が本科研研究の調査問題にもなっている。

この授業では「たかし(A)」「たける(B)」「たけし(C)」「たかひろ(D)」（小学校の場合）の 4 人から 1 人を選ぶので選択肢を創出する場面はないが，4 人の走り幅跳びの 5 回の記録を提示していることから，1 人を選ぶ際の考え方や根拠は極めて多様であり，多面的である。

プロセス能力は，A-1～A-6 のすべてに該当し，特に，A-4，A-6 が着眼点である。

データをどのように読み取るか，ファールの「×」をどのように解釈するか，また，コミュニケーションの活発化によって，自分では考えつかない考察の観点を知り，自分の考え方を修正し，深化させることが可能となる。ここでは，選択支援における C-2（指標・指数）といった考え方も出されるのではないかと期待される。さらに，あらゆる考察の場面で，さまざまな社会的価値観が影響するであろうことが予測できる。例えば，D-3（責任性・自律性），D-4（持続性・恒常性・一般性）などである。そしてこの授業では，D-6（快楽性・愉悦性）にまで拡がる可能性がある。選択肢から 1 つを選択するには，児童個々の中でも，さまざまな価値観が入り乱れることになると思われるが，ここには他者も納得する根拠を明確にすることが求められることになる。

小学校の授業では，「記録のよい選手」と「失敗の少ない選手」との意見が出されたが，「記録のよい選手」では，予想通り平均の考え方が主流を占めた。しかし，「×」（ファール）の解釈で意見が分かれ，「ファールは 0 ㎝か？」ということの議論に多くの時間が当てられた。このような授業では，児童の考えや思いを，子どもの“ことば”で自由に発言させることが大切であり，授業者は，この点を十分に考えて授業を進めていた。このような流れから，授業者も指摘しているように，分母を 5 とした場合は「失敗も含めた記録の期待値」であり，分母を試技数（ファール以外）とした場合は「跳んだ時に出る記録の平均」といった児童なりの指標を設定していったと捉えることができる。「失敗の少ない選手」では，「失敗率」を求めて意思決定の参考にした児童もおり，多様な価値観の基で，子どもの思考が確実に拡がっていることが認められた。

なお，高等学校の授業では，正式な競技のルールに振り返り，5 回のデータの中のはじめの 3 回にのみ着目するなど，小学生には見られない視点からの検討がなされた。また，野球部に所属する生徒からは，練習と試合における実力の発揮の程度を自らの経験から述べ，他者からの賛同を求めようとする発言も見られた。

（4）自動販売機の設置場所を考えよう〔小学校〕(6.5)

この授業では，教材検討の当初は東京都統計局が作成した「まなぼう統計」のソフトを利用することが提案されていたが，問題の場面を児童の生活の中に求めることによって，子どもの価値観のもとで多様な選択肢が創出されるのではないかとの議論の中で，問題場面が大幅に修正されたものである。

また，こうした検討を経て，自動販売機の設置場所を設置会社の社員の立場で提案書としてまとめるという場面を設定したことで，根拠を明確にする必要性を高めたことにも授業者の工夫がある。

プロセス能力は，A-1（定式化），A-3（数学的推論・分析），A-4（解釈・評価），A-5（数学的コミュニケーション），A-6（数学的・社会的価値認識）が該当する。また，選択支援では，C-1（シミュレーション），C-4（確率・統計的推論）が，社会的価値観では，D-1（公平性・公正性・平等性），D-2（多様性・多面性・協調性），D-3（責任性・自律性）が該当する。

また，授業者は，学級内で，プロセス能力の水準に差があると考えていたが，実際の授業のおいては，当初は「自分の家の近く」とか「遊び場所の近く」といった個人の価値観での考えが出されたものの，「売上」に着目する意見が出されてからは，「人の集まる所」といった社会的価値にも着目した考えが出されていった。ここでは，自動販売機における飲料の売り上げのデータや住民の数，交通量など，考察する上で必要なデータについても話し合われている。また，問題場面を，児童にとって実際の生活空間としたことにより，実際に自動販売機が設置されている場所を考慮するなど，生活経験を踏まえた考えも見られた。

解決においては，データを点数化して考える児童もおり，割合と独自の点数化を総合して結論を導いた児童もいた。これは，授業者が想定していたように，水準の差が顕著に現れた場面であると考えられる。

なお，授業は，自力解決の後に同じ考えの児童によるグループをつくり，少人数での議論の中で考えを深め，これを発表し，さらに全員でこれを評価するという形態であり，個人思考に加え，他者との交流，考えの比較，考えの修正，考えの評価といった相互作用を大切にした展開であった。

（5）交通事故を減らそう〔中学校〕(6.6)

Bowland Math.の「交通事故を減らそう」を実践した授業である。

仮想の問題場面であるが，「100,000 ポンドの予算」の中で，「対策プラン」を町議会に提案するという文脈には新鮮さがある。さらに，導入場面では，日本の交通事故の実態を示すことによって，問題の解決の必要性を高めている。

この問題では，極めて多くのデータが必要であるが，専用のソフトウェアを 2 人 1 台で使用させるペア学習と，学級全体での議論，さらに，2 ペアを集めた 4 人の小グループでの検討といった複数の授業形態を，生徒の反応によって授業者が適宜使い分けている点も授業の特徴である。

また，授業の最後には，それぞれのグループによるプレゼンテーションを通して，他者評価と自己評価により考え方を振り返る場面を設定している。

プロセス能力は，A-1～A-6 のすべてに，また，社会的価値観では，D-6 以外のすべてに該当している。さらに，選択支援では，C-1（シミュレーション），C-4（確率・統計的推測が強調されている。

授業当初のペア学習の段階（仮説を立てる段階）では，考察の着眼点を決めてパソコンをうまく活用し，豊富なデータの中ら必要なデータを取り出していたが，ここでの検討では，ペアそれぞれが着目した交通事故の実態やその要因に焦点が当てられていた。これは，授業者が指摘しているように，A-2（数学的推論・分析）などがなされていたことを示している。一方，グループによる活動では，仮説を踏まえ，予算を考慮した事故防止の優先すべき対策についての検討が見られた。これは，A-5（数学的コミュニケーション）の活発化であるとともに，多様な社会的価値観が表出された場面であると捉えられる。

さらに，相互評価の段階では，仮説に対応した対策プランの選択において，その妥当性が指摘されることになった。ここでは，「良かった点」，「良くなかった点」，「改善点」について記述させることによって，自己評価へとつなげている。

なお，このような授業では，データを収集し，あるいは多種多様のデータから，解決に必要なものを取り出すことが大切である。ここでは，パソコン等を用いることは必要不可欠であるが，

授業者の学校では，こうした形での学習は極めて日常的であり，生徒は活発にパソコンを操作していた。このような学習環境を，すべての学校が可能な状態になることが求められよう。また，パソコンによるペア学習に終始することなく，生徒の反応に応じて，ペア，小グループ，全体討議といった多様な授業形態を使い分ける授業にも目を向ける必要がある。

（６）水の分配〔中学校〕(6.7)

水不足に悩むアルジェリア，ヨルダン，トルコの 3 か国に水を公平に分配するにはどうしたらよいかを考え，WWRB（架空の国際支援機関）に提案するという，Bowland Math.のケーススタディ『利用可能な水の量』を，日本の中学校第 1 学年の実態に照らして改題し，実践したものである。（４）と同様に，多様な授業形態を取り入れた実践である。

プロセス能力は A-1～A-6 のすべてに該当しているが，それにも増して，この授業では，選択支援における C-2（指標・指数），そして，社会的価値観の D-1（公平性・公正性・平等性）について，生徒がどのように対応するかも興味深いところである。

授業者は，Bowland Math.の「利用可能な水の量」で提示される各国の人口，面積，利用可能な水の量のデータに加えて，農業における経済活動人口，農地面積のデータも与えた。それは，人間の基本的な生活のために必要な水よりもはるかに多くの水を農業で必要とするという状況を踏まえることにより，つくり出される指標に多様性が出てくることを期待したからである。

授業形態は，個別解決，3～4 人のグループ，学級全体の議論の組み合わせであるが，グループは，水準 2（多様性の萌芽）と水準 3（社会的）の生徒が含まれるように意図的につくられたグループであることが特徴である。

生徒は，独自に仮定をおいて考えだした。例えば，「農業に従事している人は，一般の人よりも 2 倍の水を必要とする」のもその一つである。このような発想は，指標の再検討につながり，例えば，「すべてが農業従事者である」と仮定して「(1 年間に利用可能な水）÷（人口）＋（1 年間に利用可能な水）÷（耕地面積)」とした生徒は，問題の解答をヨルダンとし，面積と人口との関係は考える必要はない（面積が狭くても人口が多い場合もある）との考え方に立った生徒は，「(1 年間に利用可能な水）÷〔(人口）＋（農業人口）＋（耕地面積)〕」とし，トルコとした。これらは，説明が十分とは言えないものの，自分なりの視点を設定して指標つくっている段階である。

これに対し，「農業で使う水」をどうのように位置づけるのかの価値が議論となる中で，「農業を特別視する必要があるのか」,「仮定せずに情報だけで考える」との意見も出されている。結局，最も支持を得た考えは，「農業の人は一般家庭よりも 2 倍の水を使うと仮定し，「(1 年間に利用可能な水）÷〔(人口）＋（農業人口)〕」となった。

なお，授業者は，生徒個々の変容に着目する中で，A-1（定式化）において，水準 2 から水準 3 に引き上げられた生徒が認められたが，その背景には，グループや学級での相互作用の質が数学的判断の質に結びつくことを指摘している。

（７）バスケットボールの選手を選ぼう〔中学校〕(6.8)

この授業は，バスケットボール部のレギュラー選手を選出する場面において，監督の立場で選手を選ぶというものである。「監督の立場に立って」ということに加え，これを「保護者に対して説明する」という問題設定にすることによって，根拠を明確にして説明する必要性を強調させている。

また，データには，身長，得点，体力，バスケットボールの技能面に加え，「部活動の出席率」を加えていることが特徴である。さらに，5 名のレギュラーに対し，すでに 3 名は決定している状況の中で，残りの 2 名を選出するという場面設定は，授業者のより深い教材研究の表れであると捉えられる。すでに選ばれている 3 名のデータに着目させて，その妥当性を認識させた上で，次の段階へと考えを深化させていくという授業展開である。

また，授業者も述べているように，実際に生徒が監督の立場で部活動の選手を選ぶことは考えられないものの，オリンピックなどの日本代表選手の選出方法など，他者が納得できる決め方を明確にしていくことは，最近，我が国では社会問題にもなっている。こうした点にも着目した授業であり，解決の必要性を生徒が実感できる問題場面であると考えられよう。

プロセス能力は，A-1（定式化），A-3（数学的推論・分析），A-5（数学的コミュニケーション），A-6（数学的・社会的価値認識）が該当する。また，C-1（シミュレーション），C-2（指標・指数），C-3（評価式）が，社会的価値観では，D-1（公平性・公正性・平等性），D-2（多様性・多面性・協調性），D-3（責任性・自律性）が該当する。

授業の実際では，各選手の評価（A，B，C）を数値化する，試合を 2 か月後と仮定してここに新たな価値観を含めて考えようとするなど，多面的に考察を深め，多様な選択肢を創出していた。

生徒の個々の考えに着目すると，例えば，生徒 SW は各選手の技能について検討し，生徒 SM は出席率の少ない選手を候補対象から外し，さらに，生徒 SY はすでに選ばれている選手の傾向を把握した上で，守りと攻撃の要となる選手を選択している。特に，出席率の評価をどのように捉えるかは，生徒個々の価値観の違いが表面化される場面であり，この授業の意図が明確化されることにつながったと考えられよう。

また，授業者は，こうした生徒の「プロセス能力」の変容について，授業観察と授業後の自由記述の内容（学習感想）を参考に詳細に分析している。生徒 SW を例に挙げれば，A-6（数学的・社会的価値認識）において当初は水準 1 であったが，生徒 SM や SY の考えを受け入れたことにより，水準 2 へと変容したと述べている。生徒 SW は，最終的に自分の考えを変えることはなかったものの，他者を説得できる根拠を見いだそうとしていた様子がわかる。

このように，生徒の多くは，他者との相互作用を通して多様な価値観の存在を知り，これによって，多様な結論が見いだされることを納得していったと考えらえる。

なお，この授業ではグループで検討した後で，グループの代表 1 名を残して他の生徒は興味のある他のグループに移動して，新たな議論の場を設けるという工夫がなされている。

（8）修学旅行のルートを決定しよう〔中学校〕(6.9)

この授業は，修学旅行の見学地（7 ヵ所）を「点」で，また，そのルートを「線」で図形的（図的）に捉えることが重要であり，「B：数学の内容」では，「B-1：代数的」だけでなく，「B-2：図形的」にも当てはまるものである。

「A：プロセス能力」のいくつかについて具体的な記述がなされていることから，本科研研究の授業についての理解を深めることができると考える。

プロセス能力を授業の流れにそって振り返ってみると，次のようになる。

A-1（定式化）では，単純化・理想化された「スケジュールマップ」と「京都移動時間早見表」（いずれも実際物）が指標となるとされており，「渋滞はない」，「到着から出発までを 30 分」との仮定のもとで数学化がなされる。

A-3（数学的推論・分析）では，上記の指標を基に，7ヵ所すべてを見学することが可能か不可能かという2つの選択肢が創出され，A-2（数学的表現）を駆使して，どちらが選択できるかの根拠を示すことになる（授業の第1段階）。

A-4（解釈・評価）では，7ヵ所すべてを見学することは不可能であることを，数学的処理（見学時間と移動時間による数式的処理）によって示していくが，これによって，生徒の考察は，はじめの問題に戻ることになる。そして，1ヵ所をはずした見学ルートをつくることから，新たな選択肢が創出されていく。

この一連の流れは，数学的モデル化プロセスとも共通するものである。授業者は，数学的モデル化に関する数多くの実践研究があるが，これを踏まえた上で，問題場面が世界文化遺産の見学地であることから，見学箇所のそれぞれの価値を考察に含めて生徒が判断していくことを想定した授業になっている。

ここでは，「D：社会的価値観」が関係するが，特に，7ヵ所のうちの1ヵ所をはずすルートをつくる規準について，授業者は，D-3（責任性・自律性），D-5（効率性・有限性），D-6（快楽性・愉悦性）が関係すると捉えている。

授業では，定められた時間（5時間）以内に，何とか7ヵ所すべてを見学できるルートをつくりたいと考え，見学時間30分という仮定を修正して解答を示した生徒もいた。授業者はこれを，D-6（快楽性・愉悦性），D-3（責任性・自律性）に関係していると捉えている。

なお，1ヵ所をはずしてルートをつくる場面では，授業形態を個別からグループ（5班）にして話し合いを行っているが，同一の社会的価値観の中での考察がよいのか，あるいは，あえて異なる社会的価値観のグループをつくっての考察がよいのかについての研究が今後の課題であると示している。

このような授業形態を含めた指導法の検討は，授業者も指摘しているように，生徒個々の水準の変容にも関係することが示唆される。

（9）どちらのドラッグストアが得かな〔中学校〕(6.10)

本科研研究の授業化では，プロセス能力に重点が置かれることによって，中学校段階であっても，算数の内容で解決可能なものが多いといったことが研究会において指摘されていた。授業者は，このような議論を踏まえ，「A：プロセス能力」，「C：選択支援」，「D：社会的価値観」を大切にしながらも，生徒が解決に用いると思われる数学の内容を，方程式と1次関数として明確化し，教材開発を行い，授業化している。

2つのドラッグストアの割引カードについて，〈課題1〉では，消費者側の立場から“どちらが得か”を検討させるが，〈課題2〉においては，逆に「支店長会議を開いて対策を考える」という場面を設定して，割引カードについて経営者側の立場から検討させている。

〈課題1〉では，A-1（定式化）を経て，2つの割引カードの優位性の関係が問題になるが，ここでは，授業者の想定通り，A-2（数学的表現）として，方程式とグラフの考え方が出され，特に2つのグラフの交点の解釈がなされた。

これを踏まえた〈課題2〉では，特にC-1（シミュレーション）が重要な活動であるが，問題の構造を検討させた上で，既存の割引カードをどのように変更すればよいかが検討された。ここでは，生徒A.I（650円は変えずに%だけ変える）や生徒Y.M（650円は変えずに%をヤスモトと同じ15%でやってみる）といった考えが出され，対策の多様性が理解されていくが，ここには，店

の利益を考えての発想も含まれている。さらに，生徒 O.T（あまり 600 円に近いと夏とあまり差がなくてつまらない。ヤスモトのほうが 1 回買うだけですんでしまうからと客がまたヤスモトに行ってしまう可能性がある）のように，客の動向を視野に入れて検討している生徒もいる。

また，班ごとに考えを発表した後の生徒の感想では，生徒 K.O が示した「来年は 2013 年ということで，20.13%引きにした。」に対して，発想のおもしろさに加えて「『新年おめでとう』の感じが出ててよかったです。」といった記述もあった。経営者側の“遊びごころ”が支店長会議における対策案に反映されていることを肯定的に捉えているのではないかと考えることもできよう。消費者にインパクトを与える上で，このような発想は重要であり，選択肢を創出する際の，社会の状況を視野に入れた社会的価値観として考えることができる。これは，D-6（快楽性・愉悦性）にも関係するのではないかと思われる。

このような捉え方は，算数・数学の指導では，これまではまったく着目されなかった視点であるが，本科研研究では，このような発想にも重点が置かれることになる。

（10）「ポカリウスを分配しよう」〔高等学校〕(6.11)

この問題は，調査に用いた課題を授業化したものである。「数学的判断プロセス」は，調査の段階で設定されたものであり，プロセス能力は，A-1（定式化），A-5（数学的コミュニケーション），A-6（数学的・社会的価値認識）が，また，選択支援では，C-2（指標・指数），C-3（評価式）が，そして，社会的価値観では，D-1（公平性・公正性・平等性），D-3（責任性・自律性）が該当する。また，授業者は，水準 1，2 の生徒が多いと判断した。

夏休みに活動する運動系，文科系の計 6 つのクラブに，スポーツ飲料「ポカリウス」の粉末をどのように配分するかという問題設定は，生徒の身のまわりの事象として，現実性のある場面であると考えられる。

授業では，一袋に入っている粉末の量など，問題文に記されていない事柄についての質問が出されたが，授業者から各自で仮定を置いて考えるよう指示がなされ，生徒の思考は，解決には何に着目する必要があるのかといった本質的な部分へと移っていった。

そして，生徒 S1 は，同じ額の生徒会費を払っていることを理由に，公平に着目し，生徒 S2 は，「(活動費）×1/4×（人数)」という評価式から検討していた。また，生徒 S3 と S4 では，運動部と文化部で差を設けるかで意見が分かれた。

高校生では，対立する意見が出されることは少ないのではないかと予想していたが，生徒は自分の価値観を基準に置き，これを他者との議論の中で，考えを深めていったと捉えられる。ここでは，何を以て公平といえるかが検討されていたようである。

ところで，生徒の感想（この授業で，どのようなことを学んだか）について，先に述べた「走り幅跳び」の授業も含めて振り返ってみると，着眼点や考え方が人によって異なること，問題の解決には他者の考え方にも耳を傾けること，柔軟に考えること，等々が挙げられていた。また，数学の内容としては，このような問題では，割合や平均の考え方が大切である，といった感想が見られた。

次節以降では，これらの授業の様子を示し，その上で成果と課題を明らかにする。

6.2　伝統技術展への行き方を考えよう

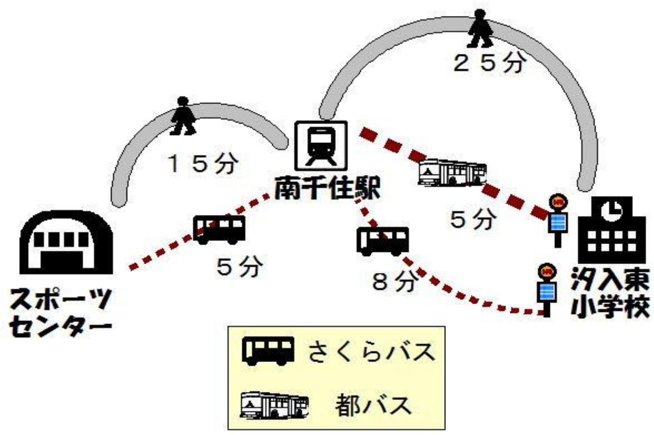
荒川区立汐入東小学校
柴田　奈緒子

概　要

学校から校外学習先までの行き方のプランを考える教材で，数学的判断力の育成を目指し，小学校４年生に対して授業を行った。その結果をプロセス能力の水準を視点に分析したところ，問題に対して自分なりの価値観をもって判断し，与えられた問題を解決する児童がいたことが確認された。一方，根拠をもって自分の考えの妥当性を述べること，また，他者の別のアプローチによる判断結果と自身の判断結果を対比して評価することに関する課題が明らかになった。

6.2.1　教材について

新４年生全員で，伝統技術展の見学に行きます。現在，３年生の担任の先生方はどうやっていけばよいかを悩んでいます。



この教材は，児童の在籍校である汐入東小学校から，伝統技術展の会場であるスポーツセンターまでの行き方のプランを下級生のために立てるものである。児童は７月に実際に「伝統技術展」へ行っており，自身の経験を活かせる本題材は，児童にとって取り組みやすい題材である。

プランを作成するには，人数，時間，時刻を考慮して，自身の価値観をもとに，交通手段を選ぶ必要がある。また，「先生に伝える」という設定により，自分の作成したルートプランに合うキャッチフレーズを付け，説明する。その際には，キャッチフレーズとの整合性を評価することになる。

6.2.2　数学的判断力に関する枠組みとの関連

Ａ：プロセス能力
A-1：定式化　　A-2：数学的表現
A-3：数学的推論・分析　　A-4：解釈・評価
A-5：数学的コミュニケーション　　A-6：数学的・社会的価値認識
Ｂ：数学の内容
B-1：代数的

Ｃ：選択支援
C-1：シミュレーション

Ｄ：社会的価値観
D-1：公平性・公正性・平等性　　D-2：多様性・多面性・協調性
D-3：責任性・自律性

6.2.3　授業の実際

授業実施日：平成２４年１１月，９日（金），１４日（水）
授業対象：汐入東小学校４年３組３６名

プロセス能力については，学級の大半の児童は水準１にあると考える。授業では視点や方法を与えて問題解決をすることがほとんどで，児童が自らの視点をもって問題解決することには今までほとんど取り組んでこなかった。そのため，はじめから人数・時間・時刻の３点を考慮させることは難しいと考え，段階的に条件設定を明らかにする。

また，相互作用を促すための手立てとして，個人解決の後にグループ（４～５人）で話し合い，互いの提案書にアドバイスしあう時間を設ける。最後に，作成したプランを児童同士で見合い，コメントを送りあって授業を終える。

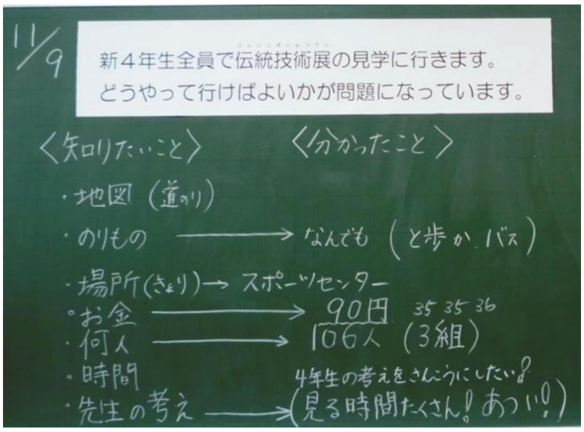
授業展開の概要：

[45 分授業]×2

第１時

１．問題の把握とプランの作成

はじめに７月に行った「伝統技術展」に関して想起させた。その上で，今回の問題を解決するための条件を少しずつ確認しながら問題の解釈を進めた。



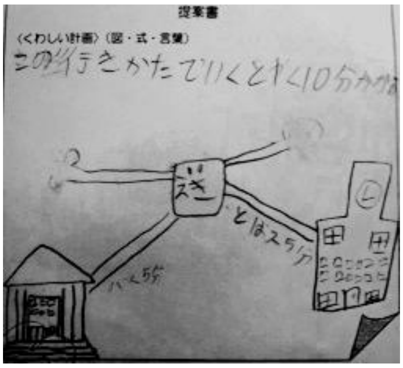
例１　定式化の様子

「新４年生は何人か？」「伝統技術展の開催場所はどこか？」「どんな行き方があるのか？」「地図が見たい。」「道のりはどれくらいか？」

「お金はいくらまで使えるか？」「先生たちの考えは？」という声があがった。「先生

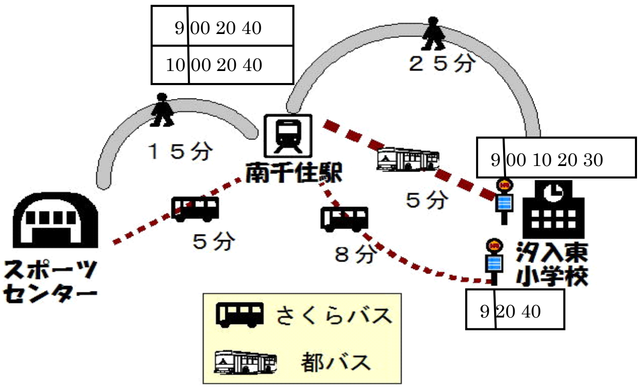
たちの考え」としては「実際に行った４年生の経験をもとにした意見を重要視する」と伝えた。そして，自分たちの経験を振り返り「技術展を見学する時間をたくさんとりたい。」「７月は暑いから，暑さ対策も必要。」と考え，一人一人自分の考えるおすすめの行き方とおすすめの理由を考えた。

例２　Ａ児（１つのルートで全員が行く）　例３　Ｂ児（複数のルートを組み合わせる）



２．時刻を考慮したプランの作成

時刻を考慮した個別解決：新たにバスの時刻表を提示した。



主に次のような活動が見られた。

「待つ時間を少なくして，なるべく早く着く行き方にした。」「バス→バスだと，かかる時間が長いので，バスと徒歩がいい。」とバスを待つ時間をもったいないと考えて，おすすめの方法を「ひとつのルートで全員が行く方法」から「複数のルートを組み合わせる方法」に変更する児童がいた。

第２時

３．プランの評価と修正

小グループでの話し合い：４名～５名のグループで話し合い，自分のプランの「売り」が分かりやすくなる提案書の書き方を互いにアドバイスしあった。

４．発表と評価

自分のプランの「売り」を確認しキャッチフレーズをつける。その後学級全体で読みあい，それぞれの提案のよいところを評価し，書く。

「時間短縮プラン」「みんな平等プラン」「他のお客さんに迷惑をかけないプラン」「涼しく快適プラン」といったキャッチフレーズがあった。

6.2.4　授業の考察

「１．問題の把握とプランの作成」の時点で「時刻に関する情報」が必要と言ったり書いたりした児童は４人いた。また，３６人中１３人がバスは同時に何本も来ないということに生活経験から気付き，例３のように複数の行き方を使ったプランを立てていた。１台のバスの定員より新４年生の人数の方が多く，全員が同じ方法をとると待ち時間がかかり，複数のルートを用いた方が，所要時間が短くてすむと考えたのだろう。本題材を現実世界の問題として捉えたため，自分なりの視点をもって条件をより詳しく把握し，より現実的な解決方法に迫りたいと考えたのだと思われる。これはＡ－１定式化の水準２に当たる姿だと考えられる。

その後，「２．時刻を考慮したプランの作成」において時刻情報を追加提示したことにより，児童から新たに価値観が表出された。「待つ時間を少なくして，なるべく早く着く行き方にした。」「バス・バスだと，かかる時間が長いので，バスと徒歩がいい。」とバスを待つ時間をもったいないと考えて，おすすめの方法を変更する児童がいた。また，「スタート時間より前に着くように，遅れても大丈夫なように１０分前に着くようにした。」「バスに間に合うか分からないので，（バスは１回だけ乗り，そのあとは）歩きを使った方がいい。」とバスの時刻表はあっても，必ずしもその通りにバスが来るか分からないので，より確実に間に合う方法を考える児童もいた。

先生の話を聞く時間を入れるプランを考える児童も出てきた。これは，実際に自分たちが行った際に一度全員集合して話を聞いてから見学したことを想起したためだと思われる。時刻を入れたことで，児童は本題材をより現実の世界の問題として捉え，考え始めた様子が見られた。

「３．プランの評価と修正」での「売り」とプランの対応状況としては，どの児童も「売り」をプランと対応させて十分に説明していたとは言えない。「売り」を説明するためには，他のプランと比較したり，「売り」の根拠を示したりする必要があるが，そもそも，全ての行き方を試してみたり，そこまでの根拠をもってプランを考えているわけではないので，十分に対応させることは難しかったと思われる。直感で，またはいくつかのプランを試算してみて「いいな」と思った方法を選択しているにすぎないので，説得力としては弱いものがあった。また，表現方法としても，細かく書き込みすぎて要領を得ないものや，必要な数字や条件が不足していてプランとして不十分なものが多かった。

また，話し合いでは，一人一人の「売り」とプランが「対応しているかどうか」という視点で，よりよい提案書にするためのアドバイスをし合うという活動をしたが，多くの児童が友だちの「売り」自体を否定し，自分の「売り」のよさを述べていた。相手の意見を一つの意見として深化させていくのではなく，みんなの意見の中から優れた一つの意見を選ぼうとする様子が見られた。

ただし，一人一人提案書の記述には一応の改善が見られた。また学習感想は，友だちと意見を交流することで自分の提案書が良くなったとする児童が多かった。児童自身としては友だちとの交流や自分のプランを見直すことを経て，自分の意見に自信をもてた様子が見られた。

完成した提案書に対するコメントには，キャッチフレーズをよい，とするコメントが多く見られた。話し合いでは，相手の「売り」より自分の「売り」の方が優れているという主張が多かったが，評価としては相手の「売り」である「キャッチフレーズ」を認める言葉が多く見られた。しかし，プランを本当に読み取っているか，本当に相手の考えを理解したうえでコメントしているかは疑問である。そもそもキャッチフレーズの根拠を十分に示してプランを説明できている児童が少なかったので，読み取ることも難しかったと考えられる。式を読みとりプランに対してコ

メントしているというよりは，言葉の説明を読み，プランの根拠となる，例えば「速い」「涼しい」「平等」「節約」といったそれぞれの価値を表面的に認めるコメントが多いと感じた。

6.2.5　成果と課題

本教材では，児童自ら「数学の問題」に定式化するために必要な視点を設定しようとする姿が見られた。児童にとって現実感のある問題を設定することにより「A－1定式化」をしようとする意欲が生まれたものと考えられる。

さらに，児童一人一人が，自ら何らかの価値観に基づいて交通手段を決定することができた。また，キャッチフレーズをつけることにより，その背後にある理由についても述べることができた。この活動からは「2．数学的判断力に関する枠組みとの関連」で想定していた「D：社会的価値観」のD-1：公平性・公正性・平等性　，D-2：多様性・多面性・協調性，D-3：責任性・自律性が見られた。児童の考えとして「速い」「涼しい」「平等」「節約」という言葉が出てきたことは，本教材の価値の一つである。しかし，その選好の根拠を数学的に明らかにすることまでは不十分であった。

友だちと交流し修正する授業後の感想では「自分のアイディアに人のアドバイスを付け加えたら，いい提案書になった。」「考えが詳しく書けた。」と自分の考えが固まり自信をもった様子の児童が多かった。しかし，話し合いの中で，根拠をもって自分の考えの妥当性を述べること，また，他者の別のアプローチによる判断結果と自身の判断結果を対比して評価することに対して手立てを講じる必要があった。つまり，根拠を明らかにし，児童が互いのプランに的確な評価をすることについて，課題が残った。

本実践でねらいとしていた「問題に対して自分なりの価値観をもって判断し，与えられた問題を解決する」という活動は，児童それぞれが達成できたと感じる。しかし，プロセス能力については未熟な部分が多く，今後の学習において高めていく必要があると感じた。しかし，今回の問題を通して児童は「現実的な課題に対して，自らの視点と価値観をもって解決しようとする」ということを体験できた。このような問題を発達段階に応じて系統的に取り扱っていくことで，児童は問題解決におけるプロセス能力を高めていけると考える。

6.3　的当て

成城学園初等学校
島田　功

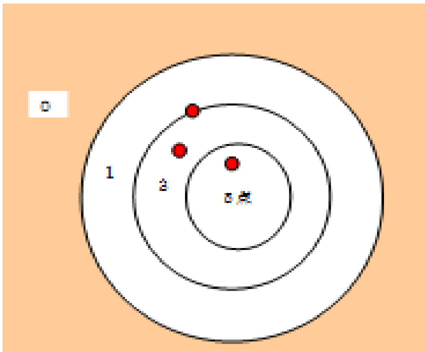
概　要
文化祭で的当てを実施した時に起こったことを基にして教材開発をし，他者との相互作用を促す授業を小学生 4 年生に行った。その結果，定式化の段階で，1 年生のことを考えて数学的モデルを構成する考え（思いやりの価値観）とみんなのことを考えて数学的モデルを構成する考え（平等・公平の価値観）があることが分かった。一方，数学的モデルの中には，平均の考えによるものも出たが，まだ平均についてはまだ学習していないので，それを一般化するには至らなかった。

6.3.1　教材について

文化祭でクラスイベントをすることになりました。的当てを準備し，参加した人に点数に応じた景品をあげることになりました。的から，どの程度離れるのか等を話し合い，的の点数も決めました。点数に応じた景品も決めました。投げる回数は３回にしました。点数に応じた景品は，次のようにしました。合計点数に応じて，下のような景品がもらえます。

13 点以上：好きな物を３個とれる。
10 点から 12 点まで：好きな物を２個とれる。
３点から９点まで：好きな物を１個とれる。

１年生の児童は，次のようになりました。この１年生は，好きな物を何個もらえますか。



筆者が開発したものであり，文化祭で以前の４年生が実際に体験したことを基に，構成したものである。的当てを企画して，得点に応じて景品を準備したが，練習の段階で１年生が投げた玉が的当ての線上に当たってしまい，どのように得点化し，景品をあげればよいかを考察する。

6.3.2　数学的判断力に関する枠組みとの関連

A：プロセス能力 　　A-1：定式化 B：数学の内容 　　B-1：代数的 C：選択支援 　　C-2：指標・指数 D：社会的価値観 　　D-1：公平性・公正性・平等性

6.3.3　授業の実際

日　　時：平成２５年３月１３日（水）　第３校時
対象児童：成城学園初等学校　第４学年　37 名
既習事項：加減，乗除計算，総合式，計算の順序

本学級の児童は，プロセス能力は概ね水準２にあると言えるが，A-3：数学的推論・分析については，自分で問題を読み取って判断することが難しい水準１にある児童もいる。また，A-5：数学的コミュニケーションについても，自分なりの結論を求めた方法を伝えようとしているが，他者にうまく伝えられない児童もおり，水準にはばらつきがある。今回の学習を通して，多様な視点で物事を考えられることや，様々な考えを見比べ，問題場面にあった考えについて検討することで，水準を上げていきたいと考えた。

今回は，前時の残り 10 分ほどを使って，この的当て問題を解いてもらった。それを収集して，子どもの考えを整理した。どのような考えで数学的モデルを構成しているかを分析し，本時での比較検討の計画を立てて授業を行うことにした。そうすることによって，子どもの考えを生かすことができる。更には，発表の計画を立てたら，その子達に事前に発表をすることを伝え，心構えを持つようにした。その結果，落ち着いて自分の考えを全体に伝えることができるため，A-5：数学的コミュニケーションの水準を上げていけるのではないかと考えた。また，多様な考え方に触れ，それぞれの考え方についての理解を深めていくような展開とした。それぞれの考え方の背景にある考え方（社会的価値観と数学的モデル）を話し合うことで，数学的判断のプロセス能力を高めていけるのではないかと考えた。

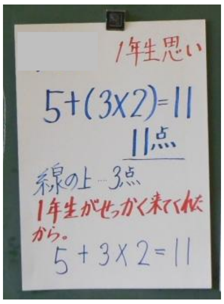
今回は授業の終末ではどの考えが良いかを各自選ぶようにした。

授業展開の概要：
[45 分授業]

0～5 分　**導入**：4 年生は文化祭でどんな出し物をしたか尋ねることで，文化祭について想起させる。その後，前時で行った的当ての学習を振り返った。

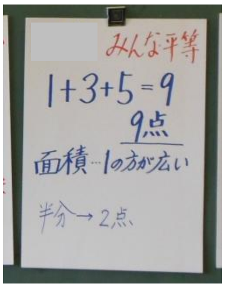
5～40 分　**発表**：

C1　1 年生がせっかく来てくれたから，点数の高い方を得点とする。



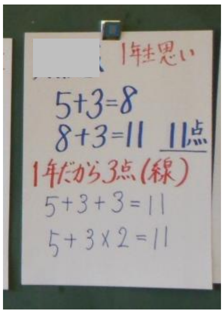
T　この式に意見のある人？
C　(　)はいらない
T　5+3×2=11

C2　面積の広い方を得点とする。



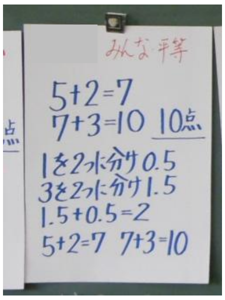
T　じゃあ質問をします。この場合は？（〇を移動）
半分だったらどうする？
C　やり直してもらう
C　半分だったら内側の方がふくれる
T　でもちょうど真ん中になることあるよね？
（1 と 0 の間の線上のとき）
C　0.5

C3　低学年なら高い方，中学年ならその間，高学年なら低い方を得点とする。



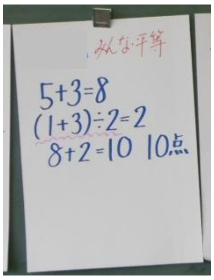
T 式から見ても C1 のと同じだということがわかります

C4　2 つの点数をそれぞれ 2 で割って，その合計を得点とする。



T　これを誰か式に表して
C　1÷2＋3÷2
T　じゃあここにきたときは？(1 と 0 の間の線上)
C　0.5
T　式に表すと？
C　0÷2＋1÷2
T

C5　2 つの点数の合計を 2 で割ったものを得点とする。



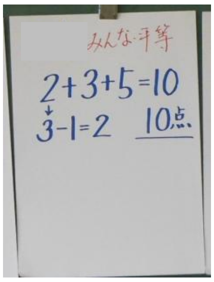
T　誰の考えと似ている？

C　C4

C　それ（（1+3)÷2）をばらばらにしただけ

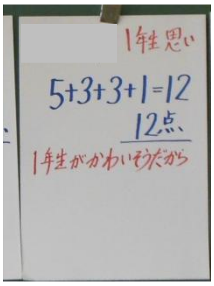
C6　高い方の点数から 1 を引いたものを得点とする。

（ただし，1 と 0 の間のときは 1－0）



T　ということはその都度変わってきちゃうということね。数学ではいつも同じ方法でできるのがいいですね。

C7　2 つの点数の合計を得点とする。



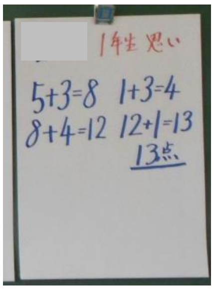
C　めったにないからどちらの点もあげた

T　5 と 3 の間なら 8 点てこと？

T　高学年ならどうするの？

C　やらない

C8　2 つの点数の合計にさらに 1 点を足したものを得点とする。



T　高学年だったら？

C　おまけしない

C　幼稚園生だったら？

C　もっと，おまけする。

40～45 分　**まとめ**：それぞれの発表を聞いて，自分はどの考えを選びたいかと，その理由をプリントに書く。また，新しい考えが浮かんだ場合はそれを書いても良い。

6.3.4　授業の考察

本実践では，前時の 10 分を使って的当て問題を解決してもらい，それを収集して分析して，比較検討の計画と発表者への事前連絡をしたために，発表する児童は落ち着いて発表することができ，聞いている子どもも発表者の考えを理解することができた。また，何よりも，指導者は，比較検討の計画を事前に立てることができるので，子どもの考えを理解したうえで落ち着いて授業に臨むことができた。発表者は，数学的モデルとその背景にある社会的価値観を述べて自分の考えを他者に伝えようとしていた。数学的モデルだけの場合には，指導者が「どのような考えでこの式を考えたんですか。」と問い，意識されていない社会的価値観を意識化させることにした。児童の中には，「僕の考えは，A さんの考えに似ているんですが・・・，でもこういう点で違っている考えです。」というように，友だちの考えと比較しながら発表する子どもも見られた。中には，発表者の意見を聞いて，「その考えだと，この場合にはどうするんですか。」というように，一般化を意識した質問も見られた。また，線上の場合を処理するのに，平均の考えで（1+3）÷２＝２というような考えも見られたが，平均は未習の内容なので，深入りはしなかった。しかし，この平均の学習に焦点を当てて展開することも可能だと思う。同じ 2 点とする考えの中には，3-1＝2 というように引き算を用いる考えも見られたが，これに対して「5 点と 3 点の間の場合にはどうするんですか。」や「1 点と 0 点の間の場合にはどうするんですか。」というような意見が出て，このひき算の考えはいつでも使える考えではないことも明らかになった。

今回のような話し合いの機会が，「他者との相互作用」として働き，多様な視点に触れる良い機会になり，児童が複数の視点を視野に入れることができたと感じる。

このような話し合いが行われたことは，「A-3：数学的推論・分析」や「A-4：解釈・評価」に関わるプロセス能力を高めることに重要な役割を果たしているだろう。

6.3.5　成果と課題

児童はこれまでに学習してきた算数の中では，必ず答えが定まる問題を扱ってきた。しかし今回の問題では，それぞれの価値観に応じて結果が変わってくる。そのような問題に対して児童は意欲的に考え，考えたことを相手に伝えようとする姿が見られたことは，今回の実践での大きな成果だと考える。このように，それぞれの意見や考えを左右する価値観がある問題を扱うことで，数学的判断に関わるプロセスが明確に実現されていくように感じた。自力解決当初は一つの視点のみに着目した児童が他方の意見を聞き，新たな視点から考察することができた。そのような児童は A-6 数学的・社会的価値認識の水準３に近づくことができたと考えられる。他者との相互作用によって水準を高めることができる可能性を感じることができた。しかし，全ての児童がそれぞれの考えを理解して判断できた訳ではないため，全員が水準を高めることができたとは言えない。今後は他者との相互作用を有効に働かせるための手立てを充実させていくことも必要だと感じた。

参考文献・引用文献

島田功(2009)「算数において意思決定力の育成をめざす授業に関する研究」，日本数学教育学会誌第 91 巻第 12 号，pp, 20-30.

6.4　走り幅跳びの代表選手を選ぼう

荒川区立汐入東小学校
室谷　将勝

概　要
体育の学習で行った走り幅跳びの記録から，区連合運動会の代表選手を選出する方法を考える教材で，「他者との相互作用」を促す手立てを講じ，小学校５年生に対して授業を行った。「記録が良い」ことと「失敗が少ない」ことが両立できないような条件を提示したことにより，はじめは一つの視点のみに着目した児童が，他方の意見を聞き，良さを知ることで，結論を変えたり，自分の価値に基づいた判断に自信を深めたり，それぞれの良さを取り入れた折衷案を考えたりする児童がいたことが確認された。一方，他者の考えを理解できずに判断した児童もおり，他者との相互作用を有効に働かせるための手立ての充実が課題として残された。

6.4.1　教材について

５年生は，来月，体力テストがあります。そのテストの結果をもとに，陸上の選抜チームを作ります。代表の４種目のうち，３種目の代表は決まったのですが，あと一人，はばとびの代表を選ぶ必要があります。

	１回目	２回目	３回目	４回目	５回目
たかし	355ｃｍ	345ｃｍ	385ｃｍ	360ｃｍ	370ｃｍ
たける	×	372ｃｍ	350ｃｍ	390ｃｍ	360ｃｍ
たけし	400ｃｍ	×	×	405ｃｍ	×
たかひろ	×	385ｃｍ	372ｃｍ	×	378cm

本教材は，体育の学習での走り幅跳びの記録を基にして，連合運動会の代表選手を選ぶという，複数の選択肢（4 人）の中から，与えられた条件を基にして一つを選びだす問題である。児童は日常の体育の学習で走り幅跳びという種目を行っており，その記録の取り扱いについても理解している。児童は与えられた幅跳びの記録のデータを使用することで選手を選択できることに気づき（A-1 定式化），着目した条件に応じて，測定の結果を基に条件を考慮して指標を設定し，場面に応じて推論し（A-3 数学的推論・分析），判断の根拠を説明する（A-4 解釈・評価，A-5 数学的コミュニケーション）という学習活動を行っていく。

選手を選ぶためには，記録だけではなく，ファールを考慮して，自身の価値観をもとに，選手を選ぶ必要がある。また，「学校の代表選手を選ぶ」という設定により，どうしてその選手が幅跳びの代表に選ぶのにふさわしいかを説明する。その際には，どのような考えが基になって選手を選んでいるのかを評価することになる。

6.4.2 数学的判断力に関する枠組みとの関連

A：プロセス能力	
A-1：定式化	A-2：数学的表現
A-3：数学的推論・分析	A-4：解釈・評価
A-5：数学的コミュニケーション	A-6：数学的・社会的価値認識
B：数学の内容	
B-1：代数的	
	B-4：統計的
C：選択支援	
	C-2：指標・指数
	C-4：確率・統計的推測
D：社会的価値観	
D-3：責任性・自律性	D-4：持続性・恒常性・一般性
D-5：効率性・有限性	

6.4.3 授業の実際

日　　時：平成２２年１０月２７日（水）　第５校時
対象児童：荒川区立汐入東小学校　第五学年児童　３０名
既習事項：割合，平均，単位あたりの量

本学級の児童は，プロセス能力は概ね水準２にあると言えるが，A-3：数学的推論・分析については，自分ではなかなか問題を読み取って判断することが難しい水準１にある児童もいる。また，A-5：数学的コミュニケーションについても，自分なりの結論を求めた方法を伝えようとしているが，他者にうまく伝えられない児童もおり，水準にはばらつきがある。今回の学習を通して，多様な視点で物事を考えられることや，様々な考えを見比べ，問題場面にあった考えについて検討することで，水準を上げていきたいと考えた。

今回児童間での相互作用を促すために，本実践では自力解決で一度選手を選んだあとに，同じ選手を選んだ児童でグループを作り，結論を導き出した根拠を確認する時間を設定した。それによって，自分たちの考えに自信を持ち，自分たちの考えを他のグループにどのように説明していくかについて考えることができるため，A-5：数学的コミュニケーションの水準を上げていけるのではないかと考えた。その後，全体での検討を設定することで，多様な考え方に触れ，それぞれの考え方についての理解を深めていくような展開とした。それぞれの考え方の背景にある「選手を選ぶ基準」とした考え方を話し合うことで，数学的判断のプロセス能力を高めていけるのではないかと考えた。

今回は「代表選手を選ぶ」という問題場面に合わせて，授業の終末ではどの選手が代表にふさわしいか，クラス全体で一人を選ぶこととした。

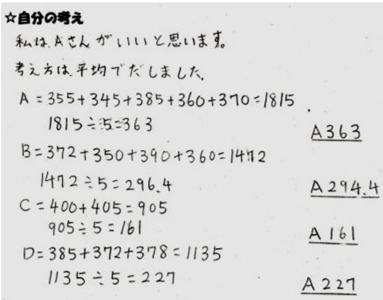
授業展開の概要：

[45 分授業]×2

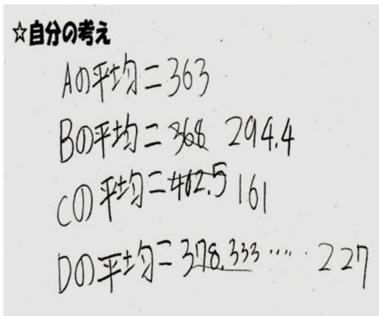
0～5 分　**導入**：６年生が代表として出場する連合運動会について想起させ，それぞれの種目についてルールや勝敗の決め方について説明をした。その後本時の問題を提示し，どのような選手を選びたいかについて話し合った。そこでは「長く跳べる選手」や「なるべく失敗の少ない選手」などの意見がでた。

5～20 分　**個別解決：児童の考えの例**

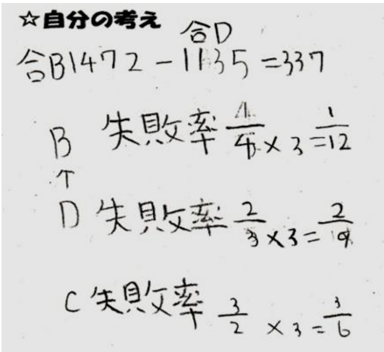
例1　記録の合計を求め，５回の平均を出した児童


☆自分の考え
私は，Aさんがいいと思います。
考え方は，平均でだしました。
A＝355＋345＋385＋360＋370＝1815
1815÷5＝363　A363
B＝372＋350＋390＋360＝1472
1472÷5＝296.4　A294.4
C＝400＋405＝905
905÷5＝161　A161
D＝385＋372＋378＝1135
1135÷5＝227　A227

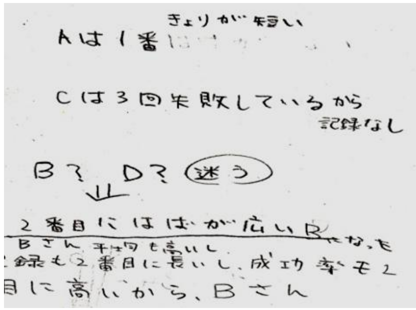
例２　記録の合計を求め，記録が残った回数で平均を出した児童


☆自分の考え
Aの平均＝363
Bの平均＝368 294.4
Cの平均＝402.5 161
Dの平均＝378.333…… 227

例３　失敗する確率を考えた児童


☆自分の考え
合B1472－合D1135＝337
B 失敗率 4/5×3＝1/12
D 失敗率 2/3×3＝2/9
C 失敗率 3/2×3＝3/6

例４　複数の条件を考慮して選択しようとした児童


Aは１番きょりが短い
Cは３回失敗しているから記録なし
B？ D？ 迷う
２番目にははばが広いBになった
Bさん平均も高いし
記録も２番目に長いし，成功率も２番目に高いから，Bさん

20～45 分　**小グループでの話し合い**：同じ選手を選んだ児童同士でグループを作り，選択の根拠について話し合う。（この段階での選手選択は　A19 名　B1 名　C6 名　D4 名）

児童はここでの話し合いで，どういった選手を選びたいか，そのための根拠として適切な考えはどれかということについて話し合った。同種の考えを持っている児童が集まっているため，自信を持って発表に臨もうとする姿が見られた。また，他の選手を選んだグループがどの

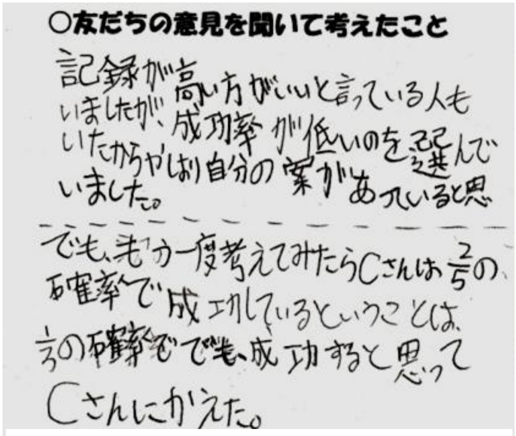
ように考えたのかを予想しようとする姿も見られた。

発表資料作り：他のグループに説明するための資料を作成する。

学級全体：それぞれの資料を提示し，提案を発表していく。すべてのグループが発表したあと，それぞれの考え方について検討を進めた。その中でまず「平均の意味について」や「ファールの回数をどのように考慮するのか」などについて児童が話し合いを進めた。

6.4.4 授業の考察

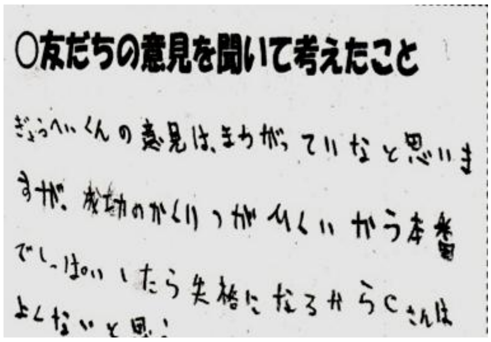
児童は当初自分で考えた答えに自信を持って検討を進めていたが，話し合いが進むにつれて他者の考えを参考にし，再度考えなおす児童がでてきた。例えば，５回の平均値を求めてＡの選手を選んだ児童の中には，最大値の高いＣの選手を選んだ児童の発表を聞いて,「遠くまで跳んだ選手が優勝できる」という協議会のルールを思い出して意見を変えた児童もいた。（図１）しかし,「試技は３回」というルールを意識した児童は，確実に成功できる選手を選ぼうとする（図２）など，児童それぞれの考え方が選択の結果に表れた。ここに，児童それぞれの社会的価値観が関係していると考えられる。しかし多くの児童は，ある方法で算出した結論に応じて選手を選んだだけの児童も多く，はじめから複数の視点に立って結論を導き出そうとする児童はまだ多くないことが分かった。そのため，今回のような話し合いの機会が,「他者との相互作用」として働き，多様な視点に触れる良い機会になり，児童が複数の視点を視野に入れることができたと感じる。


○友だちの意見を聞いて考えたこと

記録が高い方がいいと言っている人もいましたが、成功率が低いのを選んでいたからやはり自分の案があっていると思

でも、もう一度考えてみたらCさんは2/5の確率で成功しているということは、2/5の確率ででも成功すると思ってCさんにかえた。

図１


○友だちの意見を聞いて考えたこと

ぎょうへいくんの意見はまちがっていないと思いますが、成功のかくりつが低いから本番でしっぱいしたら失格になるからCさんはよくないと思

図２

また，今回の実践の中では「平均」について児童が深く考える良い機会になった。児童の中には「今回は５回跳んでいるのだから，÷５をしないといけないと思う」や,「ファールは記録なしなので，０cm ではない」といった記述があり，どのように扱うかによって数値が変わっていくことを実感し，今回の場合はどう考えたらよいかを議論することで,「平均」の理解を深めることができた。児童の考えの中に「確率」という言葉が出てきたことを考えると，５回の平均は「失敗も含めた記録の期待値」，試技数で割ったときの平均は「選手が跳んだ時に出る記録の平均値」といった意味合いを子どもたちなりに見いだしていたと考えられる。このような話し合いが行われたことは,「A-3：数学的推論・分析」や「A-4：解釈・評価」に関わるプロセス能力を高めることに重要な役割を果たしているだろう。

6.4.5　成果と課題

児童はこれまでに学習してきた算数の中では，必ず答えが定まる問題を扱ってきた。しかし今回の問題では，それぞれの価値に応じて選択の結果が変わってくる。そのような問題に対して児童は意欲的に考え,考えたことを相手に伝えようとする姿が見られたことは，今回の実践での大きな成果だと考える。このように，それぞれの意見や考えを左右する価値がある問題を扱うことで，数学的判断に関わるプロセスが明確に実現されていくように感じた。授業後の感想の中には,「C の選手を代表にしたら，記録会で失敗したらかわいそう」という意見もあり，児童は今回の問題を自分の身近な場面として捉え，現実の問題として考えることができたのだと感じる。

また，今回の問題では「記録が良い」ことと「失敗が少ない」ことが両立できないような条件を提示したことで，児童が葛藤している様子も見られた。そのことにより，自力解決当初は一つの視点のみに着目した児童が他方の意見を聞き，良さを知ることで，結論を変えたり，自分の価値に基づいた判断に自信を深めたり，それぞれの良さを取り入れた折衷案を考えたりと，多様な意見がでた。そのような児童は A-6 数学的・社会的価値認識の水準 3 に近づくことができたと考えられる。他者との相互作用によって水準を高めることができる可能性を感じることができた。しかし，全ての児童がそれぞれの考えを理解して判断できた訳ではないため，全員が水準を高めることができたとは言えない。今後は他者との相互作用を有効に働かせるための手立てを充実させていくことも必要だと感じた。

今回は他者との相互作用を促すための手立てとして，同意見のグループを組ませたが，違う意見を含んだ小グループでの話し合いの時間を設けた場合にどのような話し合いが行われるかについても，今後実践をしてみたいと思う。

6.5 自動販売機の設置場所を考えよう

荒川区立汐入東小学校
室谷　将勝

概　要
自分たちで収集したデータや提示されたデータをもとに，自動販売機の売上げ本数を予測し，設置場所を考える教材で，「他者との相互作用」を促す手立てを講じ，小学校５年生に対して授業を行った。その結果をプロセス能力の水準を視点に分析したところ，自分なりの視点をおいて情報を読み取り，解決する児童がいたことが確認された。一方，児童が考えた解決の解釈を行い，検討している際に，社会的価値観がどのように関係しているのかに関する課題が明らかになった。

6.5.1 教材について

あなたは飲料水の自動販売機を設置する会社の社員です．今回の会議で汐入の町に自動販売機を１台増やすことが決まりましたが，新しい自動販売機をどこに置くかまでは決まっていません．次回の会議でその場所を話し合おうということになりました．そこでみなさんに，どこに自動販売機を置くことにするかを考えてほしいという依頼がきました．

本教材は，大江戸地区という架空の町にある自動販売機についてのデータを基にして，自分たちが住んでいる汐入の町のどこに自動販売機を設置するかを考える問題である。東京都統計局が作成した「まなぼう統計」というソフトを基にし，小学生にも教材として扱えるよう修正をして取り扱った。

児童は自動販売機の設置場所や売り上げ本数に関わる要因を挙げるとともに，既に収集してある汐入の町の通行量のデータを使用できることに気づき（A-1 定式化），仮定を明らかにして，売上本数の予測をするとともに（A-3 数学的推論・分析），自分が決めた設置場所の根拠を的確に説明する（A-4 解釈・評価，A-5 数学的コミュニケーション）という学習活動を行っていく。Bowland Maths.の「交通事故を減らそう」のように，様々な情報の中から自分たちが重要だと考えるデータを取り出して考えていく問題といえる。

6.5.2 数学的判断力に関する枠組みとの関連

A：プロセス能力	
A-1：定式化	
A-3：数学的推論・分析	A-4：解釈・評価
A-5：数学的コミュニケーション	A-6：数学的・社会的価値認識
B：数学の内容	
B-1：代数的	
	B-4：統計的

C：選択支援

C-1：シミュレーション

C-4：確率・統計的推測

D：社会的価値観

D-1：公平性・公正性・平等性　　D-2：多様性・多面性・協調性

D-3：責任性・自律性

6.5.3 授業の実際

日　　時：平成２４年１１月１４日（水）　第５校時

対象児童：荒川区立汐入東小学校　第五学年児童　７５名

既習事項：割合，平均，単位あたりの量，百分率とグラフ

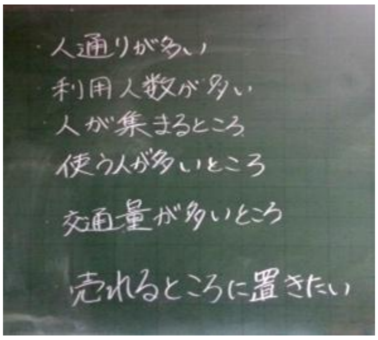
本学級の児童のプロセス能力にはばらつきがあるが，概ね水準２にあるといえる。しかし，一部の児童については，A-1 定式化や A-4 解釈・評価については水準１にある児童もいる。それらの児童が，他児童の考えを聞くことで多様な考えに触れ，水準をあげていくことができればと考えた。

本教材は，児童が一人で解決をしていくことが難しいことが予想されたため，児童同士の相互作用を促す機会を多く設けるために，まず個人で考えた解決方法を友だちと交流し，多様な視点で考えることができることに気づける時間を自力解決の前に設定した。また自力解決後は同じ選択結果になった児童同士で小グループを作り，自分たちの選択結果の根拠を確かめた。グループでの選択結果を他者に向けて提案するための準備の時間を取った後，全体に対して自分たちの提案を発表する。その後それぞれの提案について吟味する時間を設定することで，多様な解決方法の中からそれぞれの良さについて考え，現実に照らして結論を出すという展開とした。自動販売機の設置会社に提案送ることを目的として活動を始めるため，終末には設置場所とその根拠となる考えを提案書として提出するという活動にした。

授業展開の概要：

[45 分授業]×２

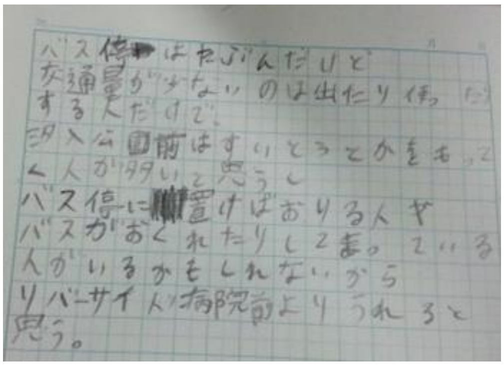
0～10 分　**導入**：始めに生活経験から自動販売機の設置場所について想起させ，どのような設置場所が望ましいかについて学級全体で考えた。当初は「自分の家の近くがいい」や「遊び場所に近いから」のように，自分たちの生活をベースに考える児童もいたが,『売り上げが多くなるか』という問題の視点を確認したところ,「人が多ければたくさん売れると思う」というような意見にまとまっていった。また，どのような情報があれば解決できるかを問いかけたところ,「汐入の他の自動販売機の売



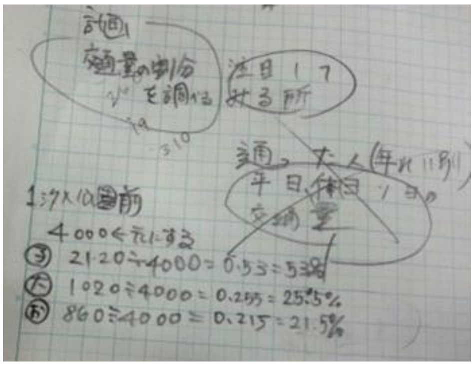
上げ」や「汐入に住んでいる人の数」「どのような人が通るか」や，「平日と休日では人数が違うのか」などの意見がでた。

10～25分　**個別解決**：主に次のような活動が見られた。

例１　生活経験から結論を導き出そうとした児童

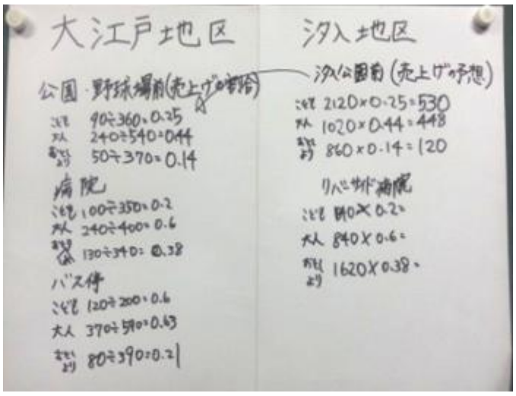


例２　データから割合を求めて考えようとしている児童

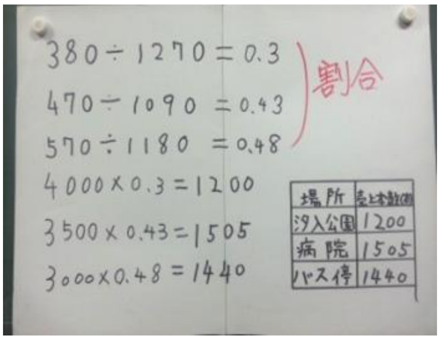


25～45分　**小グループでの話し合い**：3～5 名のグループで話し合い，その結果を画用紙にまとめさせた。例えば，次のようにまとめたグループがあった。

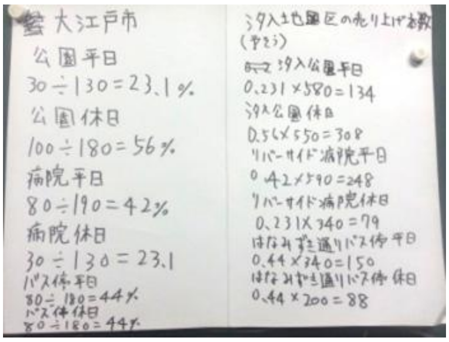
例３　年代別の売り上げ見込みを求めたグループ



例４　交通量における売り上げ見込みを求めたグループ



例５　平日と休日の売り上げ見込みを求めたグループ



45 分～　　**学級全体**：それぞれの資料を提示し，提案を発表していく。すべてのグループが発表したあと，それぞれの考え方について検討を進めた。その中でまず「どのように売り上げ見込みを求めたか」や「なぜそのデータを使って割合を求めたか」，「それぞれが求めた売り上げ見込みが持つ意味」について児童が話し合いを進めた。

6.5.4　授業の考察

問題を提示した時点では児童は自分たちで自由に考えを持って設置場所を思い浮かべたが，「売り上げ」という視点が加わったことで，それぞれのデータに注目し始め，そのデータをどのように使っていくかについて考えた。その「売り上げ」に関わる要因として「交通量」や「年代」「平日と休日」といった条件を選ぶ際に，児童それぞれの生活経験や社会的価値が関係してきたのだと考えられる。

手立てとして挙げた友だちと考え方を交流させる時間を通して，「割合」という考え方が使えそうだと気付いた児童が多く，自力解決では多くの児童が割合を求めて解決を進めた。しかし，３つのデータ全てを自分なりに点数化し，それらを総合して結論を導き出した児童もおり，「A-3 数学的推論・分析」の水準に差があることが明らかになった。

全体での検討を終えて，児童の中には「別の考え方でもやってみたい。」「表の見方，使い方によって答えが変わってくる。」などの感想がでていた。学級での話し合いという相互作用を通して，児童の中に新しい視点やアプローチが加わったことで，そのような反応が出たと考えられる。汐入地区は自分たちの町であるため，求めた割合だけでなく生活経験上「病院前にはお店があるから」「バス停は病院を利用する人だから」などの要因を加えて設置場所を考える児童もいた。一方，中には「計算が簡単で分かりやすいから」という理由から結論を出すなど，現実場面を想起せずに結論を出している児童もいた。このようなことから，「A-4 解釈・評価」については水準１から２の間にいる児童が多いと考えられる。

6.5.5　成果と課題

学習を終えての児童の学習感想の中に「このような問題は，割合を使って求めた方がよいと思う」とあり，割合が日常生活に活用することができることを実感した児童は多くいた．また，「みんなが同じ資料から考えていたのに，選んだ結果が違って驚いた」「同じ場所を選んだグループでも，いろいろな考えが出ていて面白かった」，「いろいろな考えがで

ていたけど，割合を使っているグループの方が納得できた」など，多様な考え方の中でも，割合を使って考えることの有効性についての記述もあった．

また，「同じ考え方（割合を使って求める）をしているのに，結果が全然違って驚いた」，「いろいろなやり方があるのがおもしろかったけど，やり方によってちがう答えがでることが不思議だった」「３つのチームが同じ割合を求めているのに，たくさんの考え方がでたのがびっくりした」など，「割合」という考え方をしていても，その扱うデータによって結果が異なることに対しての意見が多く出ていた．これまでに行ってきた割合や百分率の単元の学習では，決められた数値を使って割合を求めていくことが中心であったが，自分たちで数値を選んで割合を求めるという学習を経験したことで，児童は割合という学習を深めることができたと考えられる。

本実践でねらいとしていた活動は，レベルに差はあるが児童それぞれが達成できたと感じる。しかし，その中で発揮されるプロセス能力については未熟な部分が大きく，様々な学習を通して高めていく必要があると感じた。

数学的判断力に関する枠組みにある「D:社会的価値観」については，ワークシートや発言の中に表出してくることはなかった。小学校 5 年生には，自動販売機の設置者の立場に立つことが難しかった面があることも影響していると考える。しかし，学習を終えた後にある児童は「３つの候補地の真ん中に置いたらいい」ということを伝えてきた。この発言の中には「D-1 公平性・公正性・平等性」が見えるため，児童それぞれの中には考えていく背景として社会的価値観を持っていたと推察される。今後はこれらの考え方が表出し，その価値の根拠として算数を用いることや，それぞれの価値観を問題場面と照らし合わせて考えていく活動を取り入れていくことが重要であると感じた。

児童の実態として，割合について学習したばかりの小学校５年生には難しい問題であると感じた。複数の資料を見比べて情報を選択する力や，自分の求めたい結果に向けて情報を使っていく経験はこの段階ではまだ少なく，「似たような町だから，同じくらいの割合で売れるだろう」という情報を教師側で与えていく必要があるだろう。しかし，この問題を通して児童は「ある情報に注目して考えていくことで，自分なりの結論を求めることができる」ということを体験できたと感じる．このような問題を小学校期から，発達段階に応じて系統的に取り扱っていくことで，問題解決のために試行錯誤していく力を児童は身につけていけるのではないか。

6.6　交通事故を減らそう

東京学芸大学附属国際中等教育学校
本田　千春

概　要

『Bowland Maths.』の教材の１つである「交通事故の削減」をもとに，「交通事故を減らそう」という授業を開発し実践した。仮説を立てる段階，根拠を示し説明し合いながら結論を導く段階，安全対策案を発表し，評価する段階に分けて，生徒の主な解決過程を分析した結果，本実験授業を通して，仮説を立てること，数学的論拠に基づいて結論を出すこと，発表し，それを互いに評価することの３つが，一連の解決過程の中で具現化されることがわかった。さらに，最後に解決過程を振り返らせることや，ルーブリックに基づいて評価しその結果を返すことで，プロセス能力の水準を高めることが実証的にわかった。

6.6.1　教材について

交通事故が多発して困っている町がある。その町の議会では，交通事故を削減するために，100,000 ポンド(1,400 万円)の予算を計上している。その町の過去 4 年間の交通事故のデータを分析し，どこにどのような対策を講じればよいか，対策プランを作成して町議会に提案しよう。

Bowland Maths.の教材の１つである「交通事故を減らそう」をもとに開発した授業である。町議会が，交通事故の死傷者を減らすために，十万ポンドの予算を計上したという設定のもと，過去の交通事故のデータを分析し，どこにどのような対策（信号機を設置する，標識を設置するなど）をするのかを，そのための費用も考慮しながら決め，効果的な安全対策案を作成する。4～5 時間扱いである。

付属のソフトウェアがあり，それを用いて過去の事故の傾向を分析する。具体的には，町の地図上に事故のあった箇所がマークされており，それをクリックすると，被害者の年齢，性別，けがの状況，事故の対象（歩行者，自転車，バイク，車），事故の年月日・曜日・時刻， 天候（路面状況），制限速度のデータが表示される（図１）。また，それらのデータは層別や絞り込みをしてグラフ表示することができる（図 2)。

図 1　事故の地点がわかる地図とその地点

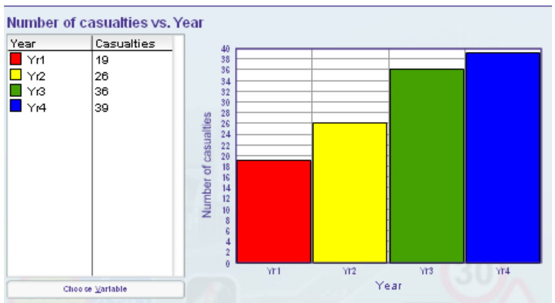


図 2　グラフ表示

本授業では，「A:プロセス能力」の A-1:定式化として，事故に影響する変数を取り出し，A-2：数学的推論・分析として，データに基づいて交通事故の原因に関する仮説を立てる。また，A-5：数学的コミュニケーションとして，仮説の根拠を的確に説明し，A-4:解釈・評価として，仮説に対応した対策プランを選び，その根拠や妥当性を説明する。

6.6.2　数学的判断力の関する枠踏みとの関連

A：プロセス能力	
A-1：定式化	A-2：数学的表現
A-3：数学的推論・分析	A-4：解釈・評価
A-5：数学的コミュニケーション	A-5：数学的・社会的価値認識
B：数学の内容	
B-1：代数的	
	B-4：統計的
C：選択支援	
C-1：シミュレーション	
	C-4：確率・統計的推測
D：社会的価値観	
D-1：公平性・公正性・平等性	D-2：多様性・多面性・協調性
D-3：責任性・自律性	D-4：持続性・恒常性・一般性
D-5：効率性・有限性	

6.6.3　授業の実際

本授業は，都内国立大学附属中等教育学校の 3 年生に対して行った。プロセス能力に関しては，学級の大半の生徒が水準２にあると考える。相互作用を促すために，個人で考える時間を少し設けたのちにペアによる探究活動を行ったり，２つのペアを合わせた 4 人グループによる互いのペアの仮説の共有化と対策プランづくりを行ったりした。授業の最後には，事故の原因を探り対策プランを作成する過程と，完成した対策プランについて，「良かった点」「良くなった点」「改善点」といった観点を設け，振り返らせた。

授業展開の概要：

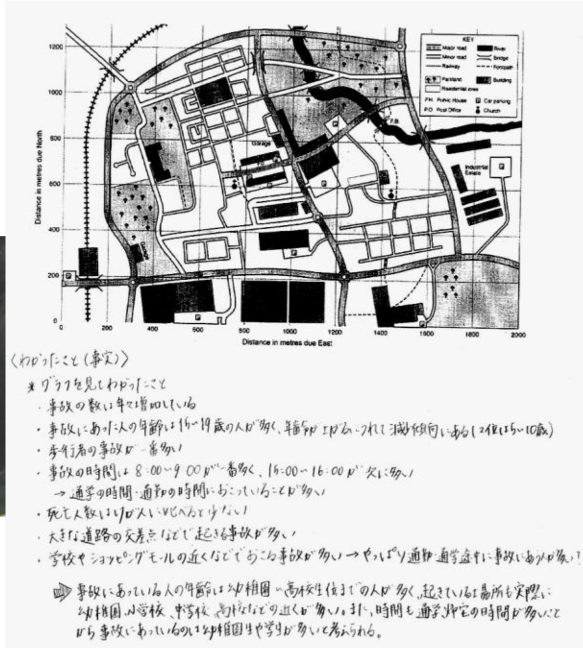
[50 分授業]×4

0～15 分　**導入**：日本は，2010 年の交通事故死者が 4863 人で 10 年連続減少したというニュースにある通り，交通事故削減に努力し，その成果が表れているという話をした後に，問題を提示した。地図と写真を示し，交通事故が多発して困っている町であることを伝え，過去 4 年間の交通事故のデータの一覧表を配布した。

15～25 分　**学級全体**：事故地図の画面で，写真の場所の事故のデータを確認した。過去 4 年間の交通事故の件数を棒グラフにすることで事故の推移がわかること

を確認したり，４年間の月別の事故の件数を円グラフに表し，２月に最も多いことを確認したりした。

25～50 分　**ペア学習**：２人で１台のパソコンを使用し，付属のソフトウェアを利用した。データを分析し，わかったことを記録シートに記入させた。



50～60 分　**学級全体**：仮説とその根拠を発表した。同じような仮説を立てている２例を取り上げ，根拠が明確なものと明確でないものを比較することで根拠を明確に示すことの必要性を確認した。

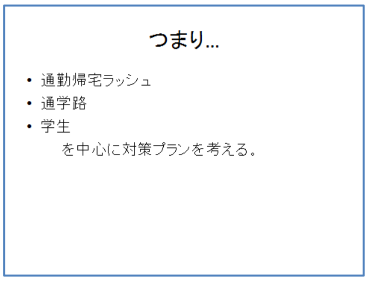
60～80 分　**ペア**：課題を確認したあと，前時の続きを行った。データを層別しながら複数の事柄を関連させて事故の原因を探っていくことができた。

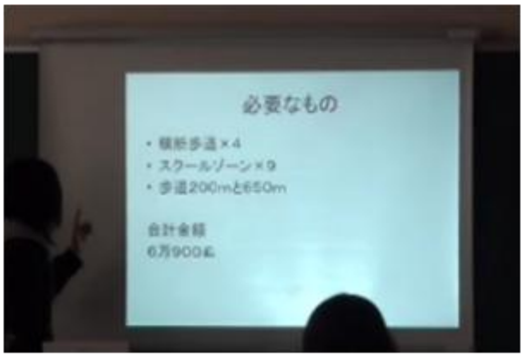
80～90 分　**学級全体**：事故の対策について話し合った。生徒からは，スピード違反の取締りをする，歩道をつくる，自転車レーンをつくる，バスレーンをつくる，パトロールをする，横断歩道をつくる，ミラーを設置するなどたくさんの対策が出された。

90～150 分　**小グループでの活動**：２ペアで１グループとなり，データを分析してわかったことをお互いに説明し合った。それぞれの分析結果から，どのような安全対策を講ずるかを４人で判断し，対策プランを作成した。発表用のパワーポイントも作成した。

150～180 分　**学級全体**：各グループが対策プラントその根拠を発表した。

発表資料の一部





180～200分　**学級全体**：対策プランとその根拠をグラフや図を用いて明確に説明することができたかどうかを評価させた。さらに，対策プランとその根拠が整合し，町全体の対策を立てることができたかどうかを自己評価させた。

6.6.4　授業の考察

本稿では，仮説を立てる段階（第１時から第２時前半），根拠を示し説明し合いながら結論を導く段階（第２時後半から第３時），安全対策案を発表し，評価する段階（第４時）に分けて，生徒の主な解決過程を述べる。

①　仮説を立てる段階

２人に１台のコンピュータを与え，ペアで探究させた。どのような場所で事故が多いのかを捉えると，「誰が」「いつ」といった点について意識が向かっていった。例えば，学校の近くで事故が多いことに着目したペアは，登下校時に子どもが事故にあっているのではないかと考え，「絞り込み」機能を利用しながら確かめていった。また，ある地点になぜ事故が多いのかを推測できない場合には，グラフや絞り込みをしながら，その原因を探っていた。A-1:定式化の事故に影響する変数を取り出したり，A-2：数学的推論・分析のデータに基づいて交通事故の原因に関する仮説を立てたりすることができたといえる。

②　根拠を示し説明し合いながら結論を導く段階

２つのペアを合わせた４人の班で，安全対策案をまとめるように指示した。ペアごとに立てた事故原因に関する仮説を，ソフトを用いて根拠を示しながら説明しあった。そして，仮説にもとづいて安全対策を考えるとともに，予算の範囲内で，どのような事故の防止を優先するかについて話し合いを進めていった。２人のペアから４人のグループにすることで，A-5：数学的コミュニケーションの仮説の根拠を的確に説明する活動がより活発に行われた。

③　安全対策案を発表し，評価する段階

班ごとに発表させるとともに，それを，対策プランとその根拠をグラフや図等の数学的表現を用いてわかりやすく説明することができるか，という観点で相互評価させた。A-4:解釈・評価として，仮説に対応した対策プランを選び，その根拠や妥当性を説明することができていた。

さらに，事故の原因を探り対策プランを作成する過程と，完成した対策プランについて，「良かった点」「良くなった点」「改善点」といった観点を設け，振り返らせて，その結果を記述させた。例えば，生徒Ｍは，次のように記述している。

良かった点

「対策プランを作成する過程で,良かったと思うのが,最初は様々な問題に直目して,その中から大きく２つの問題点にしぼって考えることができたことだ。こうすることで，まず，全体的にはどのような問題があるかを把握し，その後にしぼって考えることでひとつひとつの問題に対して詳しく調べたり対策を考えたりできたからだ。また,多くのデータを使えたのも良かったと思う。データを比較してみたり，同じ問題をいくつものデータを使って様々な視点から考えることができたので，何が原因なのかを詳しく追究することができた。」

良くなかった点

「･･･実際の対策で悪かった点は,町の人にとってその対策が迷惑かどうかを考えていなかったことだ。事故を減らすということばかり考えていたので，町の人々にとってとても不便な場所が多くなってしまった。･･･」

全員の生徒が，事故の報告書だけでなく，データを層別しながら事故の原因を探ることができた。複数の事柄を関連させて事故の原因を探ることができなかった生徒が一部いた。振り返りでは，ほとんどの生徒が，自分，ペア，グループの活動を具体的に振り返りながら記述することができていた。改善点としては，例えば，それぞれの標識についてもう少し調べて吟味して考えることができれば良かったといったものなどがあった。また，自分たちが設定した標識やパトロールで本当に事故を防ぐことができるのかがわからないということを記述している生徒もいた。

6.6.5　成果と課題

本実践を通して，仮説を立てること，数学的論拠に基づいて結論を出すこと，発表し，それを互いに評価することの３つが,一連の解決過程の中で具現化されることがわかった。さらに，最後に解決過程を振り返らせることや，ルーブリックに基づいて評価しその結果を返すことで，プロセス能力の水準を高められることが実証的にわかった。

本授業で改善したい点が 2 点ある。1 点目は，対策プランの妥当性を考えさせる活動を重視することである。本実践においても，その対策プランで何人の人を救えるかを問うことで妥当性を考えさせたが，その根拠が論理的ではないグループもあった。妥当性を論理的に考えさせることを通して，プロセス能力の A-4：解釈・評価を水準３まで高めることができると考える。2 点目は，グループごとの対策プランをどのように練り上げてクラスで１つの対策プランを提案するかという点である。どのグループの対策プランがよいかを選ばせるだけではなく,クラスでよりよい対策プランを作成するまでの活動を行うことで,A-5：数学的コミュニケーションの他者との相互作用を高めていく授業にしたい。

参考文献

Bowland Charitable Trust (2008). "*Bowland Maths*". (DVD)

西村圭一･本田千春(2012),「プロセス能力の育成を目指す授業とその評価－英国 Bowland Maths. を参考にして－」, 統計数理研究所『統計教育実践研究』Vol.4, pp.58-61

6.7　水の分配

東京学芸大学附属国際中等教育学校
本田　千春

概　要

Bowland Maths.の教材の1つである「利用可能な水の量」をもとに,「水の分配」という授業を開発し実践した。人口，面積，国内で得られる利用可能な水の量，農業における経済活動人口，耕地面積等のデータをもとに，グループで指標を作成し判断した。個人解決，グループ，学級での発表・評価などを通して，集団（グループや学級）での相互作用の質が，そこでの数学的判断の質に結びつくことがわかった。数学的判断力のプロセス能力の水準を１から３に引き上げるためには，その要因として「他者」が影響するので，個人内の水準とは別に，集団における相互作用がどのように成立するかをあらかじめ予測し,必要に応じて手立てを講じなければならないことがわかった。

6.7.1　教材について

中近東および北アフリカには水資源が不足して困っている国がたくさんある。国際支援機関（WWRB）では，アルジェリア，ヨルダン，トルコの３か国のうち，どの国が最も水を必要としているのかを考えている。データを分析してどの国が最も水を必要としているのかを調べて WWRB に提案しよう。

国	人口（百万人）	農業における経済活動人口（万人）	面積(㎢)	耕地面積(㎢)	１年間に利用可能な水（㎦）
アルジェリア（Algeria）	35	316	2,381,740	84,350	12
ヨルダン（Jordan）	6	12	89,320	2,830	1
トルコ（Turkey）	72	817	783,560	242,940	214
日本（Japan）	127	152	377,950	46,090	430

Bowland Maths.の教材の１つである「利用可能な水の量」をもとに，日本の中学１年生の実態に合わせて「水の分配」という授業を開発した。「利用可能な水の量」は，中近東および北アフリカの国々へ水資源を提供するという任務を背負った架空の国際支援機関（WWRB）からの依頼を受け，データ分析者の立場で，各国における利用可能な水の量を公平に比較し，どの国がいちばん援助を必要としているかを判断するための指標を作成することを目標とした教材である。FAO(国際連合食糧農業機関)が公開している，各国の人口，

面積，利用可能な水の量のデータを与えて，各国の一人当たりに必要な水の量を計算する必要性に気付かせるという流れになっている。本実践では，上記のデータの他に，農業における経済活動人口，農地面積のデータも与えた。それは，人間の基本的な生活のために必要な水よりもはるかに多くの水を農業で必要とするという状況を踏まえることにより，つくり出される指標に多様性が出てくることを期待したからである。

「公平」という価値観を数学的にどう反映させるかが鍵となる。具体的には，変数の選択や仮定・仮説の設定をし，それをもとに指標を作り，優先順位を決めたり，その指標に応じて比例配分したりする。

6.7.2　数学的判断力に関する枠組みと関連

A：プロセス能力		
	A-1：定式化	A-2：数学的表現
	A-3：数学的推論・分析	A-4：解釈・評価
	A-5：数学的コミュニケーション	A-6：数学的・社会的価値認識
B：数学の内容		
	B-1：代数的	
		B-4：統計的
C：選択支援		
		C-2：指標・指数
	C-3：評価式	
D：社会的価値観		
	D-1：公平性・公正性・平等性	D-2：多様性・多面性・協調性
	D-3：責任性・自律性	

6.7.3　授業の実際

本授業は，国立大学附属中等教育学校1年生に対して2月に行った。はじめから「配分」を考えさせると，水準１にとどまる生徒が少なくないと判断し，「３か国のうちのどの国が最も水を必要としているのか」を考えさせることにした。さらに，限られたデータを有効に活用し判断するという意義のある場面設定と,水準２や３の思考を促す目的から,6.7.1に示した表のデータを提示した。

個人解決の後にグループ（3～4 人）で話し合い，ひとつの提案にまとめるようにした。このグループは，授業者の判断に基づき，水準２と３と思われる生徒が混在するように構成した。

授業展開の概要：

[50 分授業]×

4

0〜20 分　**導入**：中近東および北アフリカの国々への水資源を提供するという任務を負った架空の国際支援機関（WWRB）では，水が不足していく国（アルジェリア，ヨルダン，トルコ）への公平な水の分配を考えているということを伝えた。どのようなデータが必要かを話し合った。人口，面積，降雨量，ダムの貯水量などのデータが欲しいという意見が出た。FAO（国際連合食糧農業機関）の aqastat という情報システムで公開されているデータから必要な部分だけをとってまとめた表を配布した。

20〜30 分　**学級全体**：比較方法について意見交換を行った。人口だけを比較した例を挙げて，その方法がよくない理由を話し合った。

30〜50 分　**個別解決**：データを分析してどの国が最も水を必要としているのかを個人で考えた。主に，次のような考えが見られた。

〇一人あたり（100 万人あたり）の利用可能な水の量を求め，最も少ない値のヨルダンが最も水を必要としている国であると判断

〇農業人口は２倍の水を使用すると仮定

〇農業のことも利用可能な水に含まれているから考えなくてもよい

50〜80 分　**小グループでの話し合い**：個人の考えに基づいて，4 名のグループで指標を作成した。　誰の指標が一番よいかではなく，それぞれの指標を理解し，よりよい指標づくりを行った。

80〜90 分　**学級全体**：一人あたりの利用可能な水の量だけを比較して判断しているグループに発表をさせ，意見交換を行った。生活に必要な水よりも農業に必要な水のほうが多いのだから農業のことも考えるべきだという意見が出された。

90〜100 分　**小グループでの話し合い**：意見交換を受けて指標の再検討を行った。農業のことを考慮するようになったグループや，あえて農業のことは指標に入れないグループが見られた。後者では，その理由を明確に述べるグループもあった。

100〜150 分　**小グループでの活動**：提案書を作成した。主に以下のような指標が作られた。

<u>最も多かった指標</u>

一人あたり（100 万人あたり）の利用可能な水の量を求め，最も少ない値のヨルダンが最も水を必要としている国であると判断

<u>農業に従事している人は一般の人よりも 2 倍の水を使用すると仮定</u>

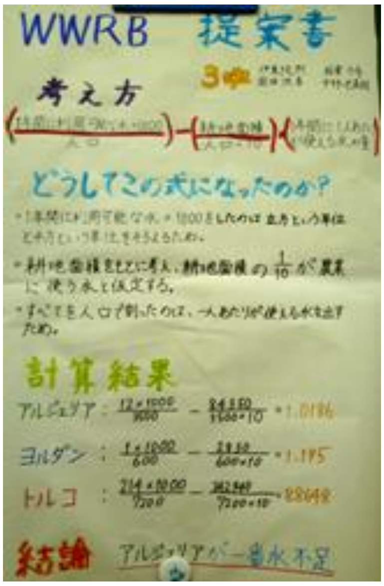
（1 年間に利用可能な水）÷{(人口＋（農業における経済活動人口）}

＝（百万人あたりが使用する水）

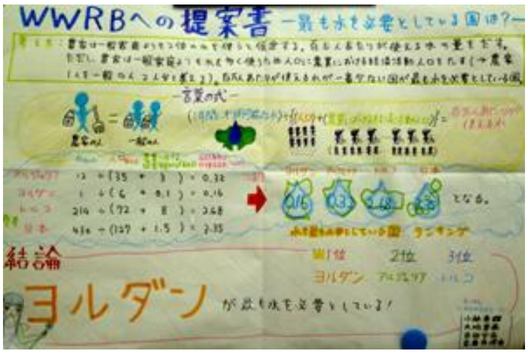
を求め，数値が最も小さいヨルダンが最も水を必要としている国であると判断

$$\left(\frac{(1\text{年間に利用可能な水})\times 1000}{\text{人口}}\right)-\left(\frac{(\text{農地面積})}{(\text{人口})\times 10}\right)=(1\text{年間に一人あたりが使える水の量}$$

を求め，最も数値の小さいアルジェリアが最も水を必要としていると判断



人口における農業人口の割合，国土における耕地面積の割合，１㎢の農地面積で使える水，一人が１年間に利用可能な水を，それぞれ計算し順位をつける。最後に国ごとに順位の和を求め，和が最も小さい国であるアルジェリアを最も水が必要な国と判断

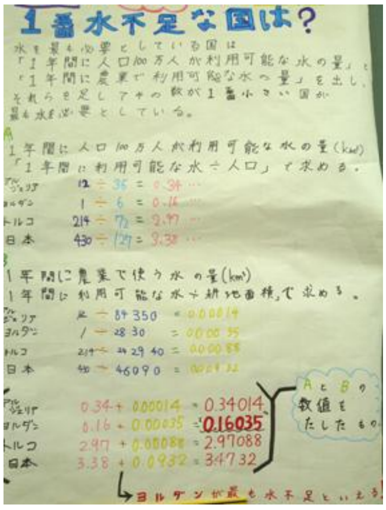


150～180 分　**学級全体**：ポスターセッションを行った。
各グループの提案書の説明を聞き，質問や評価を行った。活発に質問をする様子が見られた。

180～200 分　**学級全体**：互いに評価を行った。
どのグループの提案がよかったか，どのような数学を活用したかについて話し合った。

6.7.4　授業の考察

本稿では，二つの班（５班と６班，各4名）に着目する。はじめに６班について述べる。この班の生徒が個人解決で作成した指標と，もっとも必要性が高いと判断した国を整理すると，次の通りである。（生徒名は仮名）



遠山：「利用可能な水」を農業用と生活用に二等分し，それをもとに耕地面積1km2当たりと百万人当たりの水量を求めたが，国は選べていない。

奈良：百万人あたりの水量，国土面積に占める耕地面積の割合（「耕地面積の割合が高いほど水が必要になる」），全人口に占める農業人口の割合，面積 1km^{2}当たりの水量を求めたが，国は選べていない。

中野：百万人あたりの水量を求め，ヨルダンとした。

古田：一人当たりの水量を求め，ヨルダンとした。

遠山は，ワークシートに次のように記述している。

「水の量が÷２されているのは,水は人が使うことと農業に使うことという2種類の使い方があるので，それらはだいたい水を半分ずつ使うだろうと予測したから。」

これらの国の人が困窮せずに暮らすには，生活水だけでなく，食料も必要であり，そのためには農業用の水も確保する必要があると考えたと推察される。そして，これらの考えをもとに，班で話し合った結果，国ごとに「1年間に利用可能な水÷人口」と「1年間に利用可能な水÷耕地面積」を加えた値を指標として利用し，その値がもっとも小さいヨルダンという判断をした。

中野は，この話し合いの様子を振り返り，次のように記述している。

「・・・この２つをたしたのだが，これは総合を求めるための式です。これはみんなが農業をやっているという条件つきです（中略）自分たちで話しあったために，最初はわけが分からなかったけど，最終的には「これでよし！」といえるような結果が出せるところは楽しかったです。」

一方，５班では，個人解決において，3名が百万人当たりの水量を求め，ヨルダンとした。残りの1名は，「（1年間に利用可能な水）÷（人口＋農業人口＋耕地面積）」を求め，その値がもっとも小さいトルコとした。この生徒は，この指標の根拠を次のように説明している。

「「人口」の単位は「人」で，耕地面積は「km^2」で単位は違うけれど，それぞれの国で足しているものは同じなので差や違いはないと思う。1年間に利用可能な水からそれらを足したものを割ることで，水を必要としている人や物１つあたり水がどれ位配れるかが分かるはず。（中略）面積を足さなかった理由（は）もし面積が狭くとも人口が多かったら，水を必要としている人は多いから，面積は関係ないと考えた。」

しかし，「農業における経済人口」や「耕地面積」を利用する理由は説明していない。そして，班での話し合いでは，農業についてどうするかが問題になったものの，「農業は普通の生活水より多い。でも，それを特別視するのは…。」「農業で使う水の量が定かではなく仮定してみるとするとその値がもし違ったものだったら，答えが変わってきてしまう。それなら，仮定などせずに与えられた情報のみで考えよう。」（いずれも生徒の記録より）という意見から，一人当たりの水量を指標にして，ヨルダンという判断をした。

これら二つの班では，どの生徒も個別解決において自ら指標を作成していたが，それを用いて国を選ぶことまではできなかった生徒が見られた。

班での話し合いでは，「農業で使う水」をどう位置づけるかが話し合われた。６班は，「農業で使う水」に関する価値観が共有されたことにより，「（1年間に利用可能な水÷人口）＋（1年間に利用可能な水÷耕地面積）」という指標が創出されたと考えられる。他方，５班の生徒は，上述のように，農業について，特別視すべきではない，正確でなくなるという理由で排除しており，「農業で使う水」に関する価値にまでは迫っていなかったと考えられる。実際，各班の発表を聞いた後で，はじめて，「農業で使う水」も加味した方がよかったと記述している。これらのことから，「プロセス能力」におけるA-1定式化の水準

２にあたる生徒が，グループや学級での相互作用によって，水準３に引き上げられたことがわかる（第2章　表2－2参照）。つまり，グループや学級での相互作用の質が，そこでの数学的判断の質に結びつくことを意味している。

6.7.5　成果と課題

本実践では，上記のデータの他に，農業における経済活動人口，農地面積のデータも与えた。このことにより，つくり出される指標に多様性が出てきた。農業をどう扱うかを考えことで,「公平」という価値観を数学的に反映させたり，仮定や仮説を設定したりして，指標を作成することができた。

授業の実践を通して，個々の子どもを水準１から３に引き上げていくことが目標となるが，その要因として「他者」が影響するということが実証されたと考える。集団（グループや学級）における相互作用がどのように成立するかを考えることが今後の課題である。授業においては，グループや学級において，相互作用がどのように成立するかをあらかじめ予測し，必要に応じて手立てを講じなければならないからである。

また，授業後の協議会では，「クラス全体での話し合い」が話題となった（次ページ参照）。いくつかの考えに焦点を当て，よりよい判断になるように練り上げる場面を設けることもできたと考えられる。そのような授業展開について考えることも今後の課題である。

引用・参考文献

Bowland Charitable Trust（2008）．"*Bowland Maths*".（DVD）

本田千春（2012),「活用する力を育成する指導と評価－オープンな問題の実践を通して」日本数学教育学会『第 94 回総会特集号』，p.368

西村圭一・本田千春・山口武志・久保良宏・青山和裕・松嵜昭雄(2012)，「数学的判断力の育成に関する研究―プロセス能力の水準化とその実際―」，日本数学教育学会『第 45 回数学教育論文発表会論文集』，pp.329-334

（資料）研究協議の記録

平成２４年２月１５日（水）の授業は，イギリスからお招きした，マルコム・スワン先生，アリス・オニオン先生，ハドソン・ドミニク先生，畠中倖さんにも参観していただいた。(授業及び研究協議の発言は,ワイヤレスシステムにより,逐次翻訳が伝えられている。)

以下に，授業後の研究協議の記録（抜粋）を示す。

［敬称略］

マルコム：グループ活動についてですが，あるグループで行き詰まってしまったり，間違った方向に行きそうになってしまったとき，どのようにサポートしていきますか？

本田：まず質問してみる，考えを聞いてみるということを心掛けています。それで，行き詰まっているところには声をかけて，まず「今どう考えているの？」と少しだけ進めるようなアドバイスをします。それから，間違った方向にいっているグループがあった場合には，それが間違っているとはなるべくはっきりは言わないようにして,「他にはどんな意見があったの？」とか，なるべく介入しないようにしています。それで発表して，他のグループから指摘されて間違っていると指摘されてもいいのではないかと，それが学習なのではないかと思います。最終的に振り返って，自分たちのグループの発表はこういう点で間違っていると言えればいいのではないかと思っています。

Q：Bowland Maths.の教材をアレンジしたとのことですが，Bowland Maths.では<u>授業の最後の部分はどういう展開になっていくのですか。今回のように，プレゼンテーションさせて終わるのでしょうか</u>。

本田：グループごとに作成したポスターを掲示して，その掲示されたポスターを見て生徒が評価する，そして数学との関連について振り返るというものになっています。

松嵜：あと２時間ぐらいあったらいいかなと思った。その理由は，今回は４時間で発表して振り返りをして終わりという感じになるが，グループで活動する中で自分の意見が消されてしまったり，他の班の発表を見てこういう視点を取り入れなくてはいけないんだなと思った子どもがいっぱいいると思うんですね。それをふまえた改善版の提案書をもう一回出す，次はグループではなくて，個人でいいと思いますが。それがあると，モデル化の二巡目になるわけです。

なぜ,そう思ったかと言うと,プレゼンテーションでよく分析していた７班ですが，あの子たちは，全体の面積から耕す部分の面積をひいて人が住む面積を出して，それをもとに計算していましたよね。あれって実はウソですよね？変な言い方ですけど，全体の面積から耕す部分の面積を引いたって，全部が住める地域なわけではない。それを子どもたちは知っているはずなんですよね。ただ単純に引き算をしているから，残りは人が住めるなんて言っていますけど，そんな簡単には発想してなくて，いろんな文脈を考えているわけですよね。例えば，７班みたいに，耕す面積を引いた残りの面積に注目してやるというので，さらに分析してみるとか。あとは今回のデータは国連の食糧農業機関が出しているものをもとにしているので，農業や食糧事情にフォーカスしますよね。でも水を使うのは農業だけではなくて，工業のほうがずっと水を使う訳ですよね。そういうことも考えてできるように，２時間プラスしてやる意味があるのではないかと思いました。

本田：授業で厳しい場合には，レポート課題にして，さらに自分が欲しかったデータなども調べて追究させたいと思います。例えば，工業のことも気にしたり，生活に必要な水とはどのくらいの量なのかについて，仮定を置いて考えたのかもしれないが，その自分たちがおいた仮定が正しいのか実際に調べて，妥当だったのかなども追究するようにできるといいなと思います。

Q：クラス全体での議論がなかったが，どこに焦点を当てたかったのか？

マルコム：生徒たちからいろいろな案がせっかく出てきているので，それを取り入れるためにディスカッションしてもよかったと思う。また，プレゼンテーションした直後に，それぞれでちょっとディスカッションしてもよかったのではないかと思った。

質問ですが，昨日も今日も，全グループがプレゼンテーションをしていたが，あれは本当に必要なのか。その時間を使って，同じような考え方の代表に発表させて，それについて議論することはできないか？

本田：今回の授業は，グループで１つの提案書をつくるということがあったので，クラス全体で取り上げるということはしませんでした。ただご意見いただいたように，発表前のディスカッションがあった方がさらによい提案書づくりに生かせたでしょうし，プレゼン後のディスカッションも時間を工夫すれば作れたと思います。これからいろんな方法を探っていこうと思います。

アリス：マルコム先生が言いましたように，生徒がいろいろな答えを出していたので，ある生徒やグループの考えの一部だけを取り上げて，それについて全体でディスカッションするといった方法もあったのではないかと思います。

ドミニク：授業の中ほどでプレゼンテーション（中間発表）をさせたのがとてもよかったと思います。とてもタイミングがよかったと思います。それによって，グループで考え直すことができていました。中ほどで一度発表させるというのはよいですね。

Q：今日，ポスターを見てまわる時間をとっていましたが，そのとき，すごくたくさん子どもたちが集まっていろいろたずねていました。みんなが疑問に思っていることですので，次回，全体の場で，どんな点が疑問だったのかを問うことも必要でしょう。また，それぞれの指標の意味を振り返るような時間を設けるとよかったのではないかと思いました。

マルコム：生徒たちがポスターを見てまわるときに，質問をポストイットに書いて貼らせて，また，それに対する答えもポストイットに貼って，共有できるようにするとよかったのではないか。

本田：Bowland Maths.に「ポスターウォーク」というのがあり，今日，それをちょっとだけやってみたんですけど，やはり４組は同じような発表が多かったので，もっとポスターウォークの時間を取って，そのようなことができればよかったのではないかと思います。

Q：ベストアンサーは持っていたのか？　ちょっと考えるとユルダンと思える。いろいろ考えても，やっぱりヨルダンなのか。それともよく考えてみると他の国ということもあるのか。そうであれば，調べてみる意義もあるのだが・・・。

本田：人口と農業のことを融合させて考えるとアルジェリアになる。

Q：グループでディスカッションして決めて，それを発表して，それについてみんなでデ

ィスカッションしたとしても，自分たちの考えたことが本当にそれでよかったのか，確信を得られないで終わってしまう。こう考えればもっと考えられたというところまで，生徒は知りたいのではないか。先生が，こう判断できたらいい，と思っているところまで練り上げなくてよいのか。

本田：教師が，「これがよりよい考えです」というようなことを言うことは考えていない。生徒に気づいてほしい。発表中に書かせていたプリントには，農業のことを考えるべきだったという記述も見られた。振り返りを書かせることによって，発表して終わりではなく，さらに，そこからが大事だということが生徒に伝わると思っている。

西村：イギリスで，授業後に生徒に正解がないことについてどう思っているかたずねたところ，「こういう考え方を学んだ」「友だちの考えからこういうことを学んだ」という答えが返ってきた。日本の生徒にはないのではないかと感じた。

畠中：「他の生徒が言っていることから，よりよくするためのヒントを得た」とも言っていましたね。今日の授業でも，振り返りのプリントを見たら，そういうことを書いている生徒はいた。それが共有できればもっといいが，今日もあったと思う。

Q：プレゼンによって，数学的に高めていかなければいけないと思う。そこに教師の役割がある。例えば，今日は，同じような考え方が続いて発表されたが，同じ考えだという声が上がらなかった。式を見れば，根拠を聞けばわかるはず。そこを強調するのは教師の役割ではないか。また，方法だけを説明して，根拠がないところもあった。先生が，根拠や仮定を聞いていくということも考えられるのでは。

「どのデータを選んできて，どのような基準で比べて，結論がこうなった」，それが考え方として共通している。データや基準は違っても考え方は同じ。そういうプレゼンだからこそ，数学的なプレゼンであり，そこが数学の授業として大事ではないか。友だちはこういうふうに比べてこういう根拠で，でも自分たちはこうしたということがわかれば，子どもは結論が１つでなくても満足すると思う。

Q：なんでもいいんだよ，でなくて，ベストアンサーを見出そうと子どもが思うことが大事ではないか。

マルコム：教師の役割は根拠を明確にさせること。つまり，考えていることの奥にどういう理由づけがあるかを追究するような，的確な質問をすることだと考えています。今日の授業でいうと，生徒は，これとこれをかけて答えが出たと長々と説明していたんですけど，そういうところで量に注目するのではなくて，それがどういう意味か，なんでそういうことをやったのかとか，常にそれをやるかということを追究していくことが大事ではないでしょうか。

また，教師の役割は授業の段階でも変わってきます。最初は，質問することによって，その問題に入っていかせる，次の段階では，違う観点から見ることはできないかと問い，観点を変えさせること，そしてグループでお互いに考えたことやその推論の過程を説明できるように，そして教師に対しても説明できるようにすることです。

アリス：教師の役割の１つに，教師が，生徒に何を達成したかを考えさせること，『メタ認知』を促すこともあります。

ドミニク：そのためには，授業全体を通して，教師は，生徒がどういう状態にあるのか，よく聞き，よく見て，観察することが必要です。そして，介入すべきなのか，ほって

おいてもよいのか，そして介入するならば，個々のグループでするべきなのか，クラス全体に広げて考えさせるべきなのか，そういうことを実際に考えて授業をしています。

マルコム：アリスさんからの教師の役割の話で付け足したいことなのだが，生徒により効率的に作業を進めていくにはどうしたらよいかということを認識させるということで，例えばただ単純に「そうだね。そうだね。」と賛成するのでもいけないし，逆にそれは違うとただつきはねてしまうのもいけない。相手の言っていることを確実に理解し，その上で，その上に build するような意見を出す。その出し方がモデルとなり，そのことによって，生徒たちの会話の質を高めていくことができるのです。

マルコム：(昨日も話題になった内容が簡単ということについて) 数学の状況設定のある問題を与えられたときに，生徒が普通に使うのは最近習ったものではなくて，2，3 年前に習ったこと，要するに，確実に自分の身になっているものでないと出てこない。使わせるには，もう一工夫必要だということです。

まずやり方としては，問題をなげかけて，とにかく何でもいいからやらせる。そうすると古い道具を，自分の使いやすいものをもってきて，いろいろな方法を試してみる。それをやった段階で，次に彼らに完全ではないけれども，新しい道具を使ったやり方を示してみる。そのとき，不完全であるということが非常に重要で，その不完全な提示をもとに生徒が考えて，それを完全にするために新しい道具を使っていく。そのような方法をとると，パワフルなストラテジーとなり，生徒は向上していきます。

アリス：最初にいろいろなやり方，簡単なやり方で考えているときは，「数学化」させることが目的。次の段階で，そのパワフルなストラテジーを使わせるときは，まさに新しくなった道具を使うということが目的。異なる 2 つの目的があるということを，最初に考えていかなければいけないのではないか。

（西村）

・授業の最後をどうするかは，今後の検討課題である。

グループで出された考えから，一番よいものを選びたい。それには，それぞれの考えをもとに，ベストアンサーを練り上げていくということも含んでいる。

↑↓

教師の発問や振り返り等で，考え方（プロセス）に焦点を当てれば十分。

・水が必要な国の方が値が小さい。だれも逆数を取ろうとは考えなかった。「速さ」の学習で経験しているが，生かされていない。

・複数の指標に対して，重み付けをしたり，掛け合わせたりする子どももいなかった。グループで話し合っているときにいろいろな考えがあったが，重み付けする力も融合する力もないから，結局，1 つになってしまったとも言えないか。

・このような考え方ができないのなら，授業で学ばせなければならない。それをどう実現するかが，「練り上げ」や「教師の役割」の話につながる。

・手に入ったデータだけで，よりよい答えを出すという考え方も大事である。

6.8　バスケットボールの選手を選ぼう

山梨大学附属中学校
櫻井　順矢

概　要

本稿は，「バスケットボールの選手を選ぼう」という問題を教材化し，実践した授業の報告である。中学校の部活動（バスケットボール部）に所属する８名の選手の中から，試合に出る５名の選手を監督の立場に立って選ぶ場面を設定した。さらに，それらの選手を選んだ理由について，選手の保護者に説明するという場面を設定することで，より公平・公正な考えが求められるようにした。実際の授業においては，公平・公正な選出を考え，数値化するアイデアが出たり，生徒の発言や記述の中に，どのような方針で判断したのかによって，結論が異なるということに言及している事実が明らかとなった。

6.8.1　教材について

武田中学校のバスケットボール部は，部員数８名で活動している。次の大会に向けて，監督は８名のうち，試合に出る５名を選出し，残りの３名を控え選手としなければならない。下の表は，各選手の身長，最近１ヶ月の練習試合でその選手が決めた得点の合計，および，監督による評価（※1）をまとめたものである。

※1　監督による評価とは，監督がふだんの練習や練習試合等をみて，いくつかの観点について各選手を評価し，Ａ（優れている），Ｂ（ふつう），Ｃ（努力が必要）という３段階で記入したものである。

選手を選んだ理由については，後日，選手の保護者の前で説明しなければならない。そこで，監督は下の表にもとづいて選手を選ぶことにした。2 3 6の３名を選んだところで，あと２名を誰にするか決めかねている。あなたが監督であるとして，選手1～8のうち，どの２名を選手にするか1～8の記号で答えなさい。また，その２名の選手を選んだ理由について，保護者の前でどのように説明するか，実際に説明しなさい。

選手	身長	得点	監督による評価 ｽﾋﾟｰﾄﾞ	ｽﾀﾐﾅ	ｼｭｰﾄの うまさ	ﾃﾞｨﾌｪﾝｽ(守り)の うまさ	ﾐｽの 少なさ	部活動の 出席率
1	175	4	C	B	B	B	A	A
2	172	10	A	B	B	A	B	A
3	164	18	B	B	A	B	A	A
4	161	8	C	A	C	A	B	A
5	156	20	A	A	A	C	B	C
6	150	24	A	B	A	A	A	B
7	146	8	A	B	C	A	A	A
8	138	14	A	C	A	B	B	B

この教材は，運動部に所属する生徒にとっては切実な問題である。中学生は選手を選ぶという立場に立つ機会は少ない。しかし，生徒同士の会話の中で，好きなプロスポーツチームの先発選手を予想したり，日本代表チームの選手選考について，予想したり，妥当性を議論したりする経験は少なくない。以上のことから，本問題に対する生徒の関心は高い

ことが予想される。

バスケットボールに限らず，スポーツにおいて選手を選考する根拠となる要素は多岐にわたり，どの要素を判断材料とするかは難しい問題である。さらに，１つ１つの要素に対する評価の妥当性も問われよう。そこには，選手を選考する側の人間が，どのような方針（価値観）をもっているのかが大きく関わってくる。例えば，バスケットボールでは，シュートやパスのうまさやスピード，ジャンプ力，スタミナなどは大切である。しかし，どんなに技術があっても，ミスのない安定したプレイができるかという視点も重要である。また，ここぞというときの勝負強さ（メンタル面）も重要視されている。

スピードという要素１つをとってみても，直線を走る速さだけでなく，細かく方向転換できる俊敏性も重要となる。２０ｍを速く走ることも大切であるが，短い距離ではやく加速する瞬発力も問われるなど，１つの要素に求められることは多岐にわたる。

このように，生徒の関心は高い題材ではあるものの，判断の根拠となる要素について，どのように扱うかという部分については,生徒にとって困難性がある題材である。そこで，いくつかの意図的な場面設定をすることで,生徒に考えやすい課題となるように工夫した。

第１に，保護者の前で説明するという場面の設定である。このことにより，公平・公正な考えが求められるようになる。先にも触れたように，この課題は生徒たちが自分の方針を押し通してしまい，自分の判断の妥当性を問わない（数学を使おうとしない）ことも考えられる。保護者の前で説明するという条件に合わせ，公平・公正に判断しようとすれば，数値化するアイデアに結びつくことも予想される。すべての要素を数値化したり，いくつかの要素に限定して数値化したり，さまざまな方法で数学化することが期待できよう。

第２に，判断材料となるデータを身長，得点，監督による３段階評価に限定したことである。バスケットボールという競技自体をどの程度知っているかによって，問題の取り組みやすさは変わってくる。したがって，保健体育科での指導内容やスポーツ全体に共通しているような要素に限定することで，より多くの生徒にとって実感のあるデータとした。例えば，監督による評価には，イメージしやすいもののみとした。「部活動の出席率」は生徒の選手選出における方針（価値観）に揺さぶりをかけることがねらいである。技術面を重視するか，取り組み面を重視するか，中学生にとって対立や葛藤が起きやすい部分である。対立や葛藤によって議論が白熱し深まるのではないかと期待し，「部活動の出席率」という項目を設定した。

例えば，得点やスピード，スタミナ，シュートのうまさのある⑤を選んだ生徒に対して，出席率がＣであることをあげて,「技術面だけを重視したのではすべての保護者が納得しないのではないか」という議論が起こることが期待される。それに対し，「部の方針として技術面を重視することをきちんと説明すればよい」（判断の基準（方針・価値観）が何だったのか）や「出席率は今後の指導で改善していくことも説明すればよい」（仮定が変われば結論がどう変わるか）など，方針（価値観）についての議論が白熱するであろう。

第３に，問題の単純化である。例えば，３名はすでに決定しており，残りの２名を選出するとしたこと，監督による評価を３段階評価にしたことなどである。実際にはこれらの項目がどのようにして３段階評価されたかという基準も問題となるところであるが，ここまでの部分については，問題の仮定として設定することとした。

第４に，条件設定の工夫である。すでに選ばれている３名には，評価でＣを入れないこ

とし，長所がバランスよく配置されるように工夫をした。選考対象となる残りの５人については，短所のバランスも配慮した。

6.8.2　数学的判断力に関する枠組みとの関連

Ａ：プロセス能力	
A-1：定式化	
A-3：数学的推論・分析	
A-6：数学的コミュニケーション	A-6：数学的・社会的価値認識
Ｂ：数学の内容	
B-1：代数的	
	B-4：統計的
Ｃ：選択支援	
C-1：シミュレーション	C-2：指標・指数
C-3：評価式	
Ｄ：社会的価値観	
D-1：公平性・公正性・平等性	D-2：多様性・多面性・協調性
D-3：責任性・自律性	

6.8.3　授業の実際

日時：平成２５年２月１３日（水）　第３，４校時

授業対象：山梨大学教育人間科学部附属中学校　１年３組（男子 20 名，女子 20 名）

知的好奇心の旺盛な学級で，普段の数学の授業においても意欲的に取り組む生徒が多く，１つの問題に粘り強く考えることができる生徒の多い学級である。仲間の考えや意見を尊重し，議論をしながら数学の課題に取り組んでいる。プロセス能力については，学級の子どもの大半は水準１で考えてしまいがちだが，課題に応じて水準２で考える力は十分に持っていると考える。

授業展開上の工夫：

まず，ファーストインプレッションという意味で課題を与えてすぐに個人としての判断とその理由について考えさせる。そのいくつかについて，一斉指導の場で発表させて学級で共有する。その後，３～４人のグループを作り，その中で互いの考えを聞き合い，議論をさせて，各自の方針によって判断が異なることを顕在化させる。(この間,感じたことや考えたことなどをノートに記述させるようにする)第２時において，グループとしての方針を１つに絞ってそれに基づいた判断と理由を考えさせ，画用紙に要点をまとめさせる。発表１では，各グループでどの選手を選んだかについてのみ発表させたあと，各グループ１名の発表者を残し，他の生徒は興味を持ったグループの発表を聞きに行き，その場で議論をするというセッションを設定し，これを２回行うことで相互作用を促すようにする。最後に，特徴的な考え方で判断しているグループに代表して発表をさせ，さらに相互作用を促す。

また，授業のおわりには，多くの考えを聞いた段階で自分の考えについてもう一度整理し直し，改めて最終的な判断とその理由についてまとめてくることと授業の感想を書くことを宿題とする。

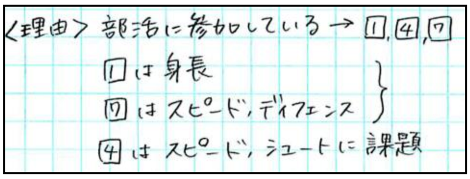
授業展開の概要：

[50 分授業]×2

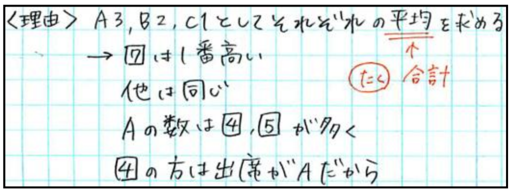
0〜8 分　**導入**：はじめに教師が顧問をしているバスケットボール部の話から，他の学校の顧問の先生との話題として，選手選考に苦慮しているという悩みで相談を受けることがあることを伝える。そこで聞いた話から今回の問題を考えたとして，課題を与えた。

8〜20 分　**個別解決**：主に次のような活動が見られた。

例 1　MR 児の考え　1，7



例 2　SM 児の考え　4，7



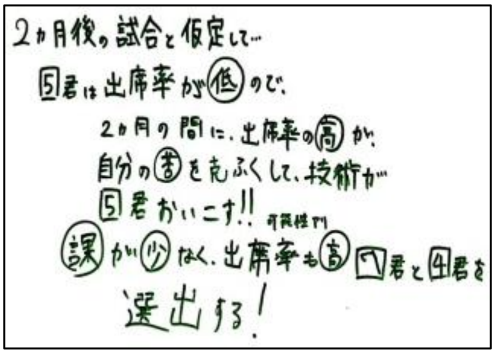
20〜45 分　**小グループでの話し合い**：3〜4 名のグループで各自の考えを発表し合い，議論させた。例えば，次のような議論が見られた。

例 3　SW 児が5を入れたいが，SW 児以外の生徒は，出席率がＣということから入れようとはしない。能力重視と練習のプロセス重視の考えの間で，対立が起き議論が活発化した。

45〜50 分　**学級全体**：グループの話し合いの中で，意見の異なる背景には，それぞれが重視しているチームの方針の違いがあることが指摘されていることを伝える。

50〜60 分　**学級全体**：個々に重視している方針が異なるために，意見が異なっているが，今からはグループで１つの方針に絞り，それに基づいた判断をすることを伝える。また，保護者に説明することから求められることを問い，「説得力のある理由」「客観性のある理由」という意見があげられ，数値化するアイデアのよさについて，全体で共有した。

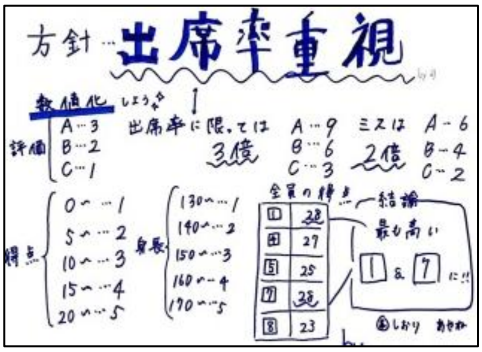
60〜80 分　**小グループでの話し合い**：先と同じグループで，１つの方針に絞り，それに基づいた判断をまとめる話し合いをさせた。例えば，１つの方針に絞るために，より公正な方法を求め，協調性を持って議論を進めている様子が見られた。



例 4　SW 児のいるグループでは，SW 児が，試合が近ければ5と他の選手の能力差は縮まらないが，時間が空いていれば能力差をうめることができると考えた。他の生徒は，それならば

と試合を２ヶ月後に行われると仮定して SW 児の考えを退け，他の生徒の考えを通した。

例５　MR 児のいるグループでは，MR 児の考え$\boxed{1}$，$\boxed{7}$に，AT 児の身長や点数，評価のすべてを点数化して指標化する考えを取り入れ，MR 児の考えが通るように，項目ごとの点数の重み付けを工夫して，数値化という客観性のある指標で意図に合った判断をした。



80～90 分　**小グループ間の交流**：グループの代表１名を残し，それ以外の生徒は興味のある他のグループのところへ行き，発表・議論をさせる。

90～100 分　**学級全体**：いくつかのグループの発表を聞く。ここまでの交流を通しての学習感想と，最終的な自分の判断を整理して書いてくることを宿題として授業を終了した。

6.8.4　授業の考察

ここでは，２つのグループに注目して考察をしてみたい。

・SW 児のグループ（SW，SY，SM，TN）

このグループはファーストインプレッションにおいて，SW→$\boxed{5}$と$\boxed{7}$，SY→$\boxed{4}$と$\boxed{5}$，SM→$\boxed{4}$と$\boxed{7}$，TN→$\boxed{4}$と$\boxed{8}$をそれぞれ選んでいた。SW はスピードを重視し，スピードがあり攻撃面で活躍できそうな$\boxed{5}$と，スピードがあり守備面で活躍できそうな$\boxed{7}$を推していた。それに対し，SM は A を３点，B を２点，C を１点として平均値を求めて数値化し，点数の高い$\boxed{7}$をまず決定した。残りのメンバーは平均値が同じであるため，A の個数が多い$\boxed{4}$と$\boxed{5}$があがるが，$\boxed{5}$については，出席率の評価が C であることから，候補対象から外していた。SY はすでに選ばれている選手以外の選手が攻撃型か守備型かに偏っている傾向を読み取り，守りの要（$\boxed{4}$）と攻撃の要（$\boxed{5}$）の選手を１人ずつ入れることにした。その際，$\boxed{4}$と$\boxed{5}$の長所とともに短所も考えていたので，$\boxed{5}$の出席率の評価は気にしていた。TN はすでに選ばれている選手の傾向を読み取り，スタミナで$\boxed{4}$を選び，$\boxed{5}$については候補に挙がっていなかった。

このような状況で議論が始まり，その中心的な論点は$\boxed{5}$についてである。特に技術面で$\boxed{5}$を入れたい SW と，候補対象からも外していた SM に対立が起きた。具体的には$\boxed{5}$の出席率の低さがどのように試合に影響するのかが話題となる。そこで，試合までに練習期間がどれだけとれるかを重視した。練習期間が多ければ，毎日練習している他のメンバーが，練習を休みがちな$\boxed{5}$を技術的にも越えることができるであろうという予測である。その議論から，授業者への「次の試合はいつですか？」という質問に結びついていた。「特に決めていないので，自分たちで定義して良いですよ。」というと，再び議論を重ね，意見発表では「試合を２ヶ月後として」$\boxed{4}$と$\boxed{7}$を選んでいた。

このグループの解決過程において，生徒 SW の「プロセス能力」の水準について考え

てみる。SW は最初は技術重視で選手を選んでいた。そこでは「スピード」を重視し，それに加えて「シュートのうまさ」や「ディフェンスのうまさ」のみで⑤と⑦を選んでいた。この段階においては，「A-6：数学的・社会的価値認識」においては自分の価値観（技術重視）に沿った判断を下しており，「自己限定的」（水準１）であったと考えられる。しかし，グループでの議論を通して，「すでに選ばれている選手の特徴」を考えたり，「出席率がよいことでチームワークにつながる」といったことを考えるようになる。つまり，今から選ぶ選手のことだけを考えていたところから，選ぶ選手以外の選手のことやそれらの選手との関わりに目を向けるようになったのである。次の試合がいつ頃かを議論した背景にも，それら他の選手との関わりを考えつつ，自分の推したい選手の活路を見いだそうという考えがうかがえる。SW は学習感想において，「それぞれの特徴を理解してそれをまとめ，分せきすることがこの問題をとくかぎだと思った。」と述べており，さらに最終的な自分の結論としては，「大会が２週間後だったら…⑤は出席数が少ないけど，２週間後だったらおいぬかれる可能性がないから。」として，やはり最初の考えどおり⑤と⑦を選んでいる。「大会が２週間後だったら」という記述や「⑤は出席数が少ないけど」という記述の中に，他者との相互作用を通して，SW の「プロセスの能力」の特に「A-6：数学的・社会的価値認識」について，「自己限定的」（水準１）から「多様性の萌芽」（水準２）への移行が見られたと考えられる。

また，選出の方法においては，SW は最初は限られた評価項目のみに着目し，それが A であるかという判断しかしていない。また，授業前半で発表した生徒の考えの中に，数値化のアイデアが紹介され，授業後半では「保護者に説明することから求められることはなにか？」という問いに，「説得力」や「客観性」があげられ，数値化のアイデアの良さが全体で確認され，「他者との相互作用」の機会は数多くあったのだが，SW を含めたこのグループは最後まで数値化のアイデアを採用しなかった。すなわち，「A-1：定式化」や「A-3：数学的推論・分析」において，は「自己限定的」（水準１）か，そこまでも及んでいない状況のままであったといえる。

・MR 児のグループ（MR，AT，HS，MA）

このグループでは，ファーストインプレッションにおいて，MR→①と⑦，AT→⑤と⑧，HS→④と⑦，MA→④と⑦をそれぞれ選んでいた。MR は「部活動というのは生徒会活動の一環なので，当然部活にしっかりと参加している選手を選ぶ。」として，出席率の評価が A である①と④と⑦に絞っている。身長の高さから①，スピードがありディフェンスがうまい⑦を選んでいる。どちらもミスの少ないという部分も評価している。AT は「監督による３段階評価」を A→３，B→２，C→１として，身長を 10cm 刻みで５段階評価，それに得点を足して指標をつくり，点数が高い⑤と⑧を選んでいる。HS は始めは⑤を選び，得点やスタミナ，スピード，シュートのうまさが高いことを評価していたが，途中で「⑤の協調性？」と書いて，⑦に変更している。もう１人の選手は④で身長が高めであることとディフェンスのうまさを評価している。MA は④を選んだ理由として「全体的に見て④は部活の出席率が少なくても得点が他の人よりも高く，評価も A が多いから。」と書いているが，前半部分は⑤を想定していると考えられる。⑦については「身長が低くても部活にしっかり参加しているし，シュートのうまさは努力でも，

平均は高かったから。これからうまくなるかもしれないから。」としており，シュートのうまさの C を気にしつつも，平均（ここでは A の個数ともとれるし，数値化した場合の値ともとれる）が高いことから，練習で克服できることを想定している。

このグループでは，MR の強い方針に加え，AT の数値化するというアイデアの良さに大きく関心が寄せられていく。MR の方針に合うような数値化の方法を探り，最終的には出席率の得点を３倍，ミスの少なさの得点を２倍，得点も身長と同じように５段階評価として，新たな指標を作り出すことになった。その結果，MR の始めの考えと同じように，$\boxed{1}$と$\boxed{7}$が得点が高くなり，選出された。

このグループの解決過程における，生徒 MR の「プロセス能力」の水準について考えてみる。MR は，「部活動というのは生徒会活動の一環なので」という発言にも見られるように，学校全体を考えた，社会的な判断をしようとしている姿勢が見られる。その意味で，「A-6：数学的・社会的価値認識」における水準は，始めから高い水準にあったことが予想される。一方で，その方針に基づいた選出方法は，出席率とミスの少ないという条件を設定しながらも，身長の高さがある$\boxed{1}$，スピードとディフェンスがよい$\boxed{7}$を選んでおり，自分個人の考えが強い。これは，「A-1：定式化」や「A-3：数学的推論・分析」については，「自己限定的」（水準１）であったといえる。その後，AT の考えを聞いたり，他者の発表を聞くこと「他者との相互作用」を通して，数値化のアイデアの良さに気づき，それをそのまま受け入れるのではなく，自分の価値観に見合った結果が得られるような工夫した数値化・指標づくりに取り組むことができた。これは，「A-1：定式化」や「A-3：数学的推論・分析」における，「多様性の萌芽」（水準２）あるいは「社会的」（水準３）へと移行しているとみることができる。そして，この水準の移行に大きく影響していることは「他者との相互作用」である。MR の学習感想では次のように

	自己内			他者との相互作用 水準 α〜γ
	水準 1 自己限定的	水準 2 多様性の萌芽	水準 3 社会的	
A-1：定式化 Formalization	A: 3 ,B: 2 ,C: 1 で数値化し，現実の問題を「数学の問題」に翻訳する。	独自の方法で数値化し，現実の問題を「数学の問題」に翻訳する。	さまざまな方法で数値化し，より妥当な「数学の問題」に翻訳する。	他者が数値化するアイデアで,現実の問題を「数学の問題」に翻訳したことを理解する。
A-3：数学的推論・分析 Analysing	数値化した値をそのまま合計して指標をつくり，判断する。	数値化した値のうち，どれを用いるかを自己選択して指標をつくり,判断する。	数値化した値のうち，どれを用いるかを自己選択して，工夫してつくった指標に基づいて判断する。	他者の数値化の方法やそれを用いた指標の作り方を理解し,その視点に沿って問題の構造を分析･判断する。
A-6：数学的・社会的価値認識 Realizing mathematical and social value	自分の価値観(選手の能力重視)に沿った数学的判断を下す。	別の価値観(出席率)を踏まえつつ，妥当な数学的判断を下す。	他者のさまざまな価値観を受け入れて検討し，より妥当な数学的判断を下す。	他者の価値観(出席率)に基づいた数学的判断を受け入れて検討し,妥当な数学的判断を下す。

書かれている。「自分の好ききらいで選手を選ぶのは簡単だけど，保護者に説明するとなると，数値などの明確な判断基準が必要となるので難しかったです。自分の考え方を，数値というはっきりとしたものにどう反映するか。これには，かなりの工夫が必要でした。」この記述から，数値化するアイデアに良さを感じた要因として，「保護者に説明する」という場面を強く意識していたことがうかがえる。

6.8.5　成果と課題

本実践では，バスケットボールの選手を選抜するという課題を設定し，その選手を選んだ理由について，選手の保護者に説明するという場面を設定した。このことによって，公平性が重視され，評価項目を数値化して指標をつくり，よりよい数学的判断が求められる場面設定をした。また，授業の中に，個人の考えを最初と最後にまとめさせる機会をつくり，最初の考えをもとに３～４人のグループでの議論，それを１つにまとめる作業，グループ間の交流，発表を通して多くの他者との相互作用の機会を作り，生徒の「プロセス能力」の育成を目指した授業づくりをした。

その結果，特に「保護者に説明するという場面設定」やグループでの議論，グループ間交流を通して行われた「他者との相互作用」により，生徒の「プロセス能力」のいくつかの側面について，水準の上昇が見られた。

本実践をよりよいものとしていくために，次のような改善が考えられる。

- 数値化するというアイデアの中にもそれぞれの価値観に基づいた判断をしている。例えば，別の学級で実施したところ，「Ａを３点，Ｂを２点，Ｃを１点」と等差数列的に点数をつけている生徒と，「Ａを３点，Ｂを２点，Ｃを０点」とＣに対して厳しく見ている生徒がみられた。後者が C という評価に対し厳しく見ているのはなぜか？というところに価値観が影響しているはずなので，数値化の根拠を記述（発表）させる。あるいは，得点数と平均身長との差の１／２を点数に含めている生徒がいたが，１／３ではなく，１／２としたのはなぜか？出席率を別扱いして，スカラー的に数値化している生徒がいた。「Ａは２倍，Ｂは１倍，Ｃは１／２倍」という数値の根拠はどうなのか？など。
- 上記のような数値化に対する価値観の実例としては，サッカーの「勝ち点」という仕組みにおいて「勝ちが３点，引き分けが１点，負けが０点」というように勝つことを重視した数値化になっている。広く知られているものなので，生徒に紹介してもよい。
- 方針を出しているが，そのような方針にした根拠は何なのかについても価値観が影響しているはずである。方針の根拠を記述（発表）させる。数学的判断の場面としては，①方針の決定，②配点（数値化）の決定，③選手の決定の３つが考えられる。それぞれにおいて，どのような価値観にもとづいて判断なされたのかを議論の対象としたい。
- ある選手を選びたいという強い思い入れも出てくると思うので，その選手が選出されるような数値の算出方法を考え出そうとすることも予想される。一見公正・公平な数値化の方法に見えるようにしつつ，実は自分の推している選手が選出されるように“操作された”数値化を考え出すこともできるということにも気づかせたい。だまされない目をもたせることにもつながる。例えば，$\boxed{8}$を推すために，身長は低いが得点をと

っていることが際立つような点数化を考える。身長と得点を反比例的（逆数的）に評価して点数化するなど。

・ 本実践では判断の場面を２段階で考えたが，それを３段階で考える。まずはファーストインプレッションということで，個人で考えさせて判断し，その理由の説明（保護者を対象とした説明として）を考えさえ，グループで共有させる。グループ内で議論する中で，方針によって結論が異なることに気づくはずなので，自分の考えがどう修正されるのか，誰のどのような意見に影響を受けて，どう変わったのかがわかるような記述をさせる。また，数値化するアイデアの公正さ・公平さを知ることにもなるので，次のステップとして，数値化の根拠についても考えさせる。（しかし，この議論は高度な議論でもあるので，状況に応じて次のグループを越えての議論の後で考えさせた方がよいかもしれない。）改めてセカンドインプレッションということで，共有後に修正した自分の判断について記述させる。その後，そのグループ内での議論を生かしつつも，１つの考えに絞り，グループ同士での共有を行うが，そこでは保護者に説明することを意識し，きちんとした説明をさせたい。最後に，もう一度，ファイナルインプレッションとして自分の考えをまとめさせる。保護者に説明することをかなり強く意識させてよい。このような３段階の記述を設定する中で，水準が上がっていくのではないか？
・ もともと与えられた条件の妥当性について，言及するような生徒がいてもよい。例えば，得点はそれぞれ練習時間の出場時間が異なるのではないか？という疑問や，監督の評価はどのような基準でだされたのか，ＡとＢとＣの違いはどの程度のものなのか？という疑問などである。

以上のような改善を取り入れ，さらに生徒の「プロセス能力」の水準を向上させていけるような授業を開発，実践していきたい。

6.9　修学旅行のルートを決定しよう

さいたま市立大宮東中学校
浜　田　兼　造

概　要

中学校３年で実施される修学旅行の見学ルートプランを考える教材を開発し，数学的・社会的価値認識による判断力をはぐくむことを目的として，中学３年生に対して授業を行った。その結果，事象を「点」で，関係を「線」で図形的（図的）にとらえ，事象間の複雑な関係を図を用いて課題を解決することができた。課題の構造を図形化（図的）することで簡潔に考えていく数学的な考え方の素晴らしさを生徒に感じさせ，生徒の解決過程や授業感想より数学的・社会的価値認識から社会的価値による判断力をはぐくむことができたと考える。

6.9.1　教材について

《 来年の修学旅行計画書 》

来年の大宮東中学校の修学旅行３日目は，班ごとに半日タクシーで京都市内にある世界文化遺産に登録されている 17 の有名な寺社等を，なるべくたくさん見学することにしました。そこで，多くの生徒が見学すると考えられる７カ所を選びました。なお，宿泊する旅館は，南禅寺から徒歩３分の所にある旅館なので，出発地点は南禅寺にします。到着地点は，新幹線に乗るために京都駅とします。

修学旅行計画書に示したように，タクシーを使って半日でなるべくたくさんの世界文化遺産を見学することにしました。見学しようと選んだ場所は，次の７ヵ所です。

【金閣寺】【天龍寺】【清水寺】【銀閣寺】【二条城】【東寺】【上賀茂神社】

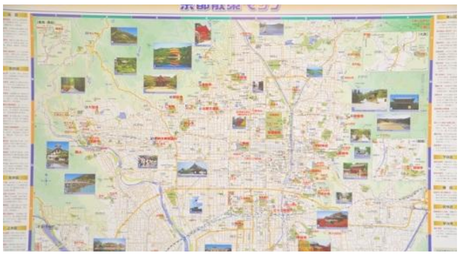


図１　京都散策マップ

来年の修学旅行に行く後輩のために見学ルートのプランをつくってください。
出発地は南禅寺，到着地は京都駅です。
日程は次のようにします。
8:30 南禅寺（旅館）からタクシーに乗り出発する。
＊見学地として選んだ７カ所の寺社等を見学するルートをつくる。
13:30 この時間までに京都駅に到着する。
《使用できる時間は，5 時間(300 分)》

７ヵ所の世界文化遺産および出発地の南禅寺，到着地の京都駅は，図１の京都散策マップより，それぞれの場所を確認することができる。しかし，図１の地図では，【課題】を解

決することはできない。そこで定式化を行う。

Ａ：プロセス能力

①　A-１：定式化

単純化・理想化された「スケジュールマップ」及び「京都移動時間早見表」[1)]が，7 つの世界文化遺産を見学するルートを考えるための指標になる。

さらに，次の点を理想化することにする。

◇移動時間は渋滞がなく，示された時間で移動できる。

◇駐車場に到着してから見学して，タクシーで出発するまでの時間を 30 分とする。②

A-2：数学的表現

図 2 のように，社寺等を「点」で，関係（見学順）を「線」で表す。それに，表 1 の京都移動時間早見表から必要な情報を取り出し関連づける。

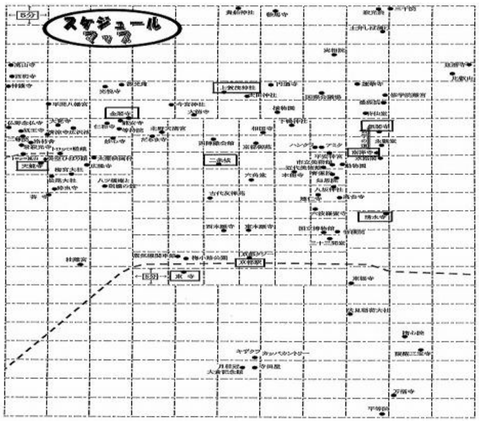


図 2 スケジュールマップ

表 1 京都移動時間早見表

京都移動時間早見表

								京都駅
							清水寺	20
						南禅寺	15	30
					銀閣寺	5	20	40
				上賀茂神社	25	25	30	40
			二条城	15	20	20	25	25
		金閣寺	15	15	30	35	35	35
	天龍寺	20	20	25	45	45	50	30
東寺	25	25	25	35	40	35	20	10

例えば，次のような見学ルートは，図 3 のように表現することができる。

G 南禅寺 → D 二条城 → A 東寺 → B 天龍寺 → C 金閣寺 →

→ E 上賀茂神社 →F 銀閣寺 → H 清水寺 → I 京都駅

②　A-3：数学的推論・分析

このとき，移動時間の合計は 170 分，7 ヵ所の見学時間は 30×7＝210（分）となる。したがって，1 時間 20 分オーバーしてしまい，京都駅に到着するのは 14:50 になる。これでは，

13:30 までに京都駅に到着することはできない。よって，この見学ルートは不可である。

そこで，【金閣寺】【天龍寺】【清水寺】【銀閣寺】【二条城】【東寺】【上賀茂神社】の 7 ヵ所を見学するルートをつくることができるのか，できないのかを改めて考える。

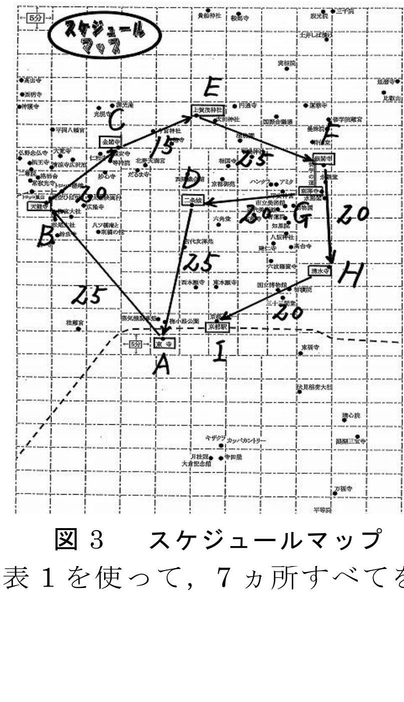


図 3　スケジュールマップ

したがって，この問題は，7 ヵ所すべてを見学することが可能であるか，不可能であるか，2 つの選択肢をもつ数学の問題になる。可能であると考える生徒は，図 2 と表 1 を使って，7 ヵ所すべてを

見学することができるルートをつくることになり，不可能ではないかと考える生徒は，7ヵ所見学することはできない根拠を示すことになる。

結論は，7ヵ所すべてを見学することは不可能である。なぜなら，7ヵ所すべてを見学しようとすると見学時間は30（分）×7（ヵ所）＝210（分），使用できる時間は300分なので，移動に使える時間は，90分になる。

図4のようにD二条城以外を線で結んで見学ルートを考えると，6ヵ所の最短移動時間は，135分であることがわかる。6ヵ所の最短移動時間がすでに135分であるので，仮に7ヵ所見学したとしたときに使用できる移動時間を超えていることがわかる。

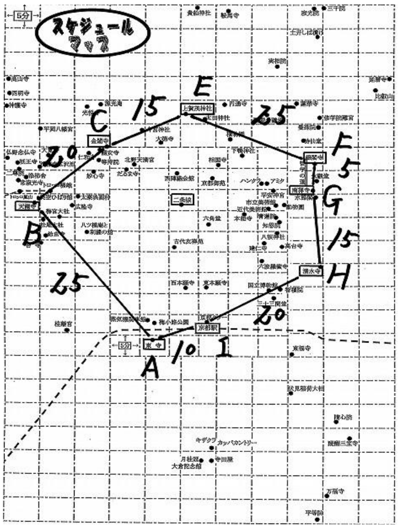


図4 6ヵ所のスケジュールマップ

③ A-4：解釈・評価

以上のことより，7ヵ所すべてを見学するルートをつくることが不可能なことがわかり，次の課題が生まれる。

7ヵ所全てを見学するルートは，つくれないことがわかりました。それでは，来年の後輩のために，改めて見学プランをつくってください。なお，7カ所の世界文化遺産から見学する場所をはずす場合，その理由を書いてください。また，帰りの新幹線のこともあるので，なるべく早く京都駅に到着するように見学ルートをつく

この課題から，幅広い選択肢を検討する必要性が生じる。7ヵ所の世界文化遺産より見学する場所をはずさなければならないので，定式化された図や表のデータから数学的結果を得るプロセスが繰り返される。

定式化された図や表のデータから数学的結果を得るプロセスの例を次に示す。なるべくたくさんの寺社等を見学するので，7ヵ所の世界遺産から1ヵ所はずして見学ルートをつくることを考える。

(1) <u>A東寺を見学場所からはずして，見学ルートをつくる。</u>

図5（G南禅寺→F銀閣寺→H清水寺→D二条城→E上賀茂神社→C金閣寺→B天龍寺→I京都駅）の見学ルートでは，移動にかかる合計時間は5+20+25+15+15+20+30=130（分），見学時間の合計は，30×6=180（分）となる。5時間を超えてしまうので，この見学ルートは不可である。

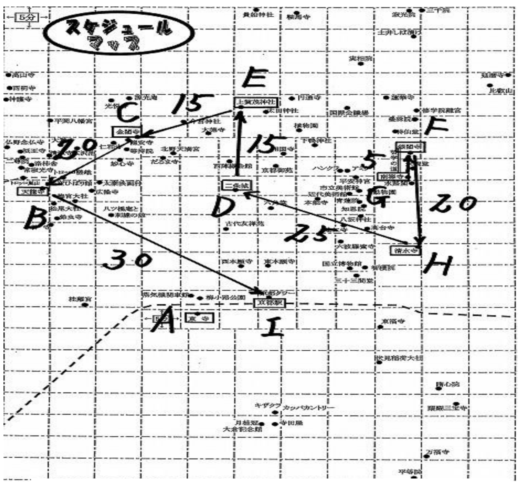


図5 A東寺をはずした見学ルート

(2) <u>B天龍寺を見学場所からはずして見学ルートをつくる。</u>

図6（G南禅寺→F銀閣寺→H清水寺→D二条城→E上賀茂神社→C金閣寺→A東寺→I京都駅）の見学ルートでは，移動にかかる合計時間は，5+20+25+15+15+25+10=115（分），

見学時間の合計は30×6=180(分)となる。5時間（300分）以内なので，この見学ルートは可である。

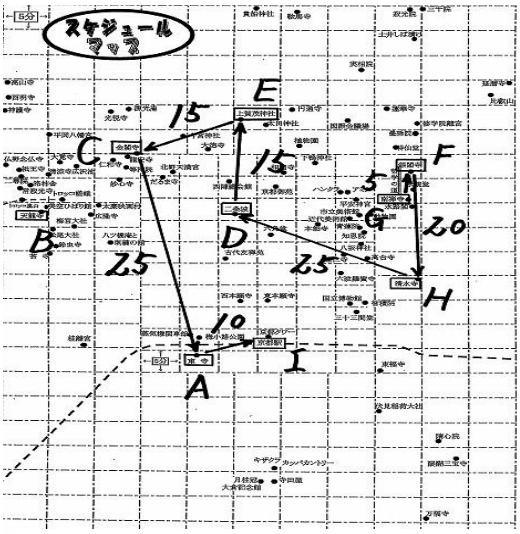


図6　B天龍寺をはずした見学ルート

授業では，個別や小グループでの解決を行い，さらに学級全体で比較検討を行う。解が一意でないために「正解」があるわけではない。どの見学ルートにするかについては，決定した理由も含めて個々に記述させ発表することにより，その見学ルートの価値についても認識できるようにさせたい。

個別や小グループでの解決，さらに学級全体での比較検討により，A-5数学的コミュニケーションおよびA-6数学的・社会的価値認識が行われると考える。また，B数学の内容については，B-1代数的とB-2図形的（図的)，C選択支援については，C-1シミュレーション，D社会的価値観については，D-3責任性・自立性，D-5効率性・有限性，D-6快楽性・愉悦性を考えることができる。

6.9.2　数学的判断力に関する枠組みとの関連

A：プロセス能力

A-1：定式化	A-2：数学的表現
A-3：数学的推論・分析	A-4：解釈・評価
A-5：数学的コミュニケーション	A-6：数学的・社会的価値認識

B：数学の内容

B-1：代数的	B-2：図形的

C：選択支援

C-1：シミュレーション	
	C-4：確率・統計的推測

D：社会的価値認識

D-3：責任性・自律性	D-6：快楽性・愉悦性
D-5：効率性・有限性	

6.9.3　授業の実際

日時：平成24年2月12～14日までの数学の時間2時間

対象生徒　さいたま市立中学校　3年1組（男子18名　女子12名）

プロセス能力については，学級の大半の生徒は水準2にあると考える。

授業展開上の工夫：

7ヵ所を見学するルートをつくることが可能か不可能かについては，個々で課題に

取り組むようにした 。7ヵ所を見学するルートをつくることが不可能であるということが明らかになり，6 ヵ所を見学するルートをつくる場面からグループをつくり，グループで課題に取り組むようにした。しかし，はずした見学場所がそれぞれのグループの中で3つに分かれていたため,再度はずす見学場所同士でグループを再構成して,見学ルートをつくるようにした。

また，授業の終わりには，グループごとに，世界文化遺産の寺院等の見学ルートの発表を行い，その見学ルートのよさについて発表させる。

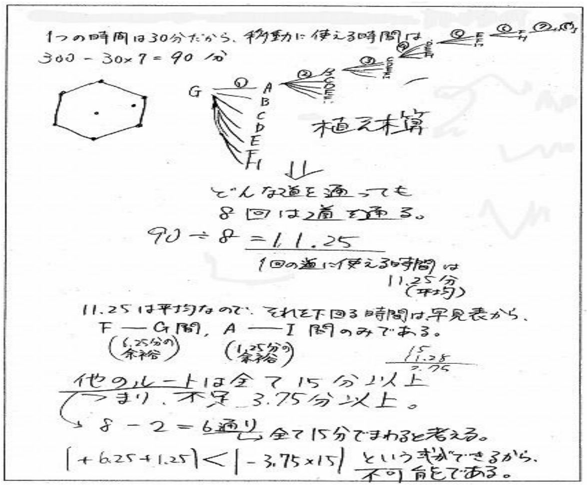
授業展開の概要：

導入：生徒はこの6月に修学旅行に行っているので，その旅行を想起させた。まず，提示した現実場面を，数学的な場面に作り替える活動を行った。修学旅行でスケジュールマップと移動時間早見表は実際に使用しているが，改めて見方について丁寧に説明した。その上で，世界文化遺産7ヵ所を見学するルートをつくらせた。

個別解決：個別解決を行う中で，生徒より7ヵ所見学するルートが可能か不可能かという話し合いになる。可能であると考える生徒は，個人で7ヵ所見学するルートをつくり，不可能ではないかと考えた生徒は，その根拠を明らかにする。

例1　不可能である根拠

樹形図より8回移動しなければならないことを確認している。そして，90÷8＝11.25より，1回の移動に使える時間11.25分を算出し，F銀閣寺－G南禅寺とA東寺－I京都の見学ルートが11.25分以内になるが，その他の見学ルートは全て15分以上になり，計算から不可能であることを示している。



グループでの話し合い：7ヵ所すべて見学することが不可能であることがわかったので，1ヵ所をはずした6ヵ所を見学するルートを生徒はつくることになる。そこで，6人のグループをつくり，そのグループの中での話し合いを通して，新しい見学ルートを考えさせた。グループの新しい見学ルートを確認したところ，写真1のグループでは，はずした見学場所が3つに分かれた3種類の見学ルートがつくられていた。右隣のグループも，同様にはずした場所が3つに分かれる3種類の見学ルートがつくられていた。そこで，はずした見学場所同士で再度グループを編成して，そのグループで活動を行うようにした（写真2)。

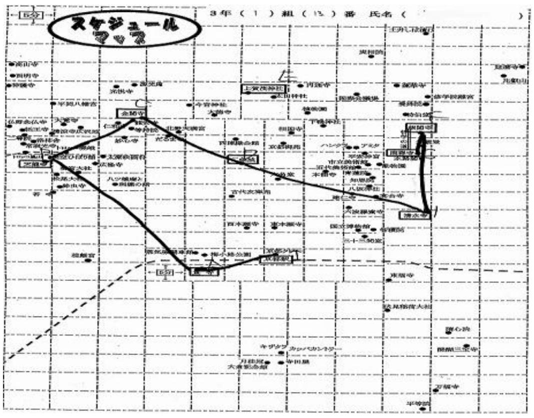
写真1　生徒のグループ活動の様子

その生徒が作成した具体的な見学ルートの例を次に挙げる。例2は上賀茂神社をはずし

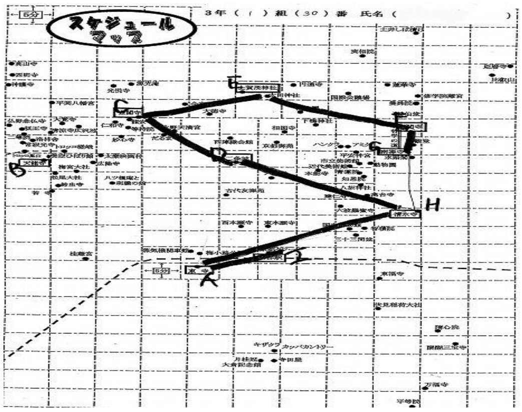
た見学ルートプラン，例 3 は天龍寺をはずした見学ルートプランである。共に見学時間は，5 時間以内に収まるようにつくられている。

写真 2 新しいグループ活動の様子

例 2　上賀茂神社をはずした見学ルート



例 3　天龍寺をはずした見学ルート



学級全体での発表：学級全体でグループごとに発表を行った。天龍寺をはずしたグループが 2 つ，清水寺をはずしたグループが 2 つ，上賀茂神社をはずしたグループが 1 つ，東寺をはずしたグループ（1 人）が 1 つであった。

6.9.4　授業の考察

生徒の反応例から，上記の枠組みがどのように実践できたかを分析する。

【第 1 時】

提示した現実場面を，数学的な場面に作り替える活動を行った。修学旅行でスケジュールマップ（図 2）と移動時間早見表（表 1 ）は実際に使用しているが，見方について丁寧に説明した。

T：5 時間つまり 300 分以内で見学できるルートをつくってみましょう。

S：先生，これはできないよ。

S：5 時間で 7 ヵ所全部をまわるのは不可能だよ。

S：いや，できそうだ。

S：先生，もう少し待っていて。絶対できるから。

S：できないと思うだけどな。

S：できるよ。
T：できるという人と，できない不可能だという人に分かれたね。でも，このまま話をしていても解決はしないと思います。できない，不可能だという人は，なぜできない，不可能なのかを示す必要があります。できると考える人は，できるんだという言葉ではなく，できるという見学ルートつくり示す必要があります。そうしないと，できるという人も，できないという人もお互いに納得しないと思います。どうですか。
S：わかりました。

生徒同士の話し合いの結果，不可能であることを示した記述を次に示す。

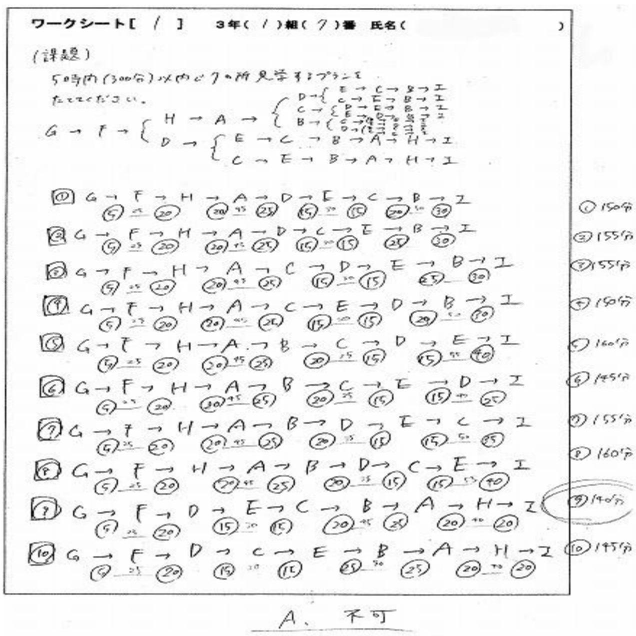


図 7　生徒 S.O

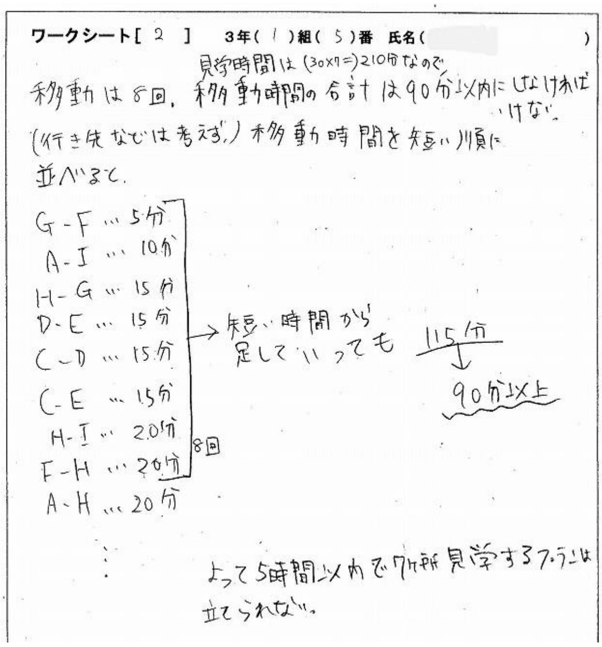


図 8　生徒 T.S

図 7（生徒 S.O）は，表 1 の京都移動時間早見表を利用して，南禅寺からスタートして局所的に一番短い時間で行くことができる場所を順に選択して，全ての見学ルートを示し，それぞれの見学時間を計算した上で，不可能であることを示している。

図 8（生徒 T.S）は，見学ルートを考えるのではなく，移動時間 90 分に着目して，京都移動時間早見表から移動時間が短い方から順に 8 個選びその合計時間を計算している。その合計時間は 115 分になり，90 分以内にならないことから不可能であることを示している。

上記の例 1 の生徒 Y.A は，樹形図より 8 回移動しなければならないことを確認している。そして，$90 \div 8 = 11.25$ より，1 回の移動に使える時間 11.25 分を算出し，F 銀閣寺－G 南禅寺と A 東寺－I 京都の見学ルートが 11.25 分以内になるが，その他の見学ルートは，全て 15 分以上になり，計算から不可能であることを示している。

以上のように，生徒の記述を全体で発表し，不可能であることをクラス全体で共有した。

【第２時】

第１時で７ヵ所すべて見学することが不可能であることが示された。そこで，７ヵ所のうち１ヵ所をはずして見学ルートをつくることになる。その際，Ｄ社会的価値観のうち，D-3 責任性・自立性，D-5 効率性・有限性の効率性，D-6 快楽性・愉悦性の愉悦性が付与されたと考える。その理由は，次の通りである。D-5 効率性は，13:30 までに京都駅に到着しなければならないため，なるべく短い時間で見学できるようにすることが求められるからである。D-3 責任性・自主性と D-6 快楽性・愉悦性は，１ヵ所をはずす理由や見学する順番の根拠を明らかにし，自他が納得する見学ルートをつくる必要があるからである。

次に生徒が考えた見学ルート例を示す。

《天龍寺をはずす》

天龍寺をはずした生徒M.Yのスケジュールマップと天龍寺をはずした理由の記述を示す。（図9，図10）

生徒M.Yは，天龍寺をはずした根拠として，D-5効率性を挙げている。記述では，Ｆ銀閣寺→Ｅ上賀茂神社→Ｃ金閣寺の見学ルート（合計110分）とＦ銀閣寺→Ｃ金閣寺→Ｅ上賀茂神社の見学ルート（合計120分）を挙げているが，移動時間がより早く到着できる110分より120分の見学ルートを選んでいる。これは，銀閣寺→金閣寺の順に見学することの社会的価値を優先して，Ｆ銀閣寺→Ｃ金閣寺→Ｅ上賀茂神社の見学ルートの120分を選択している。

図10の記述からは，D社会的価値観のD-5効率性・有限性の効率性とD-6快楽性・愉悦性の愉悦性が示されていると考えることができる。

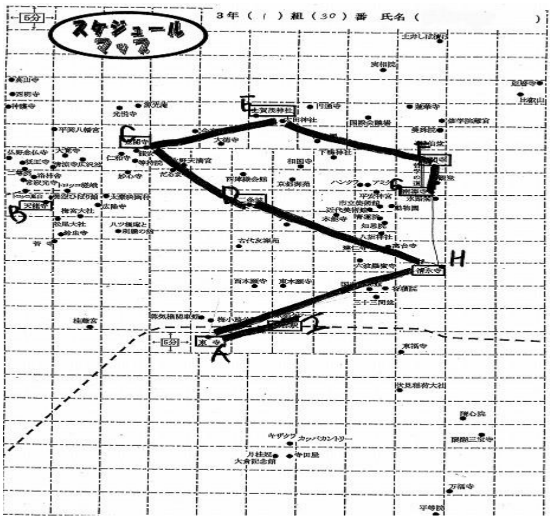


図9　生徒Ｍ・Ｙ

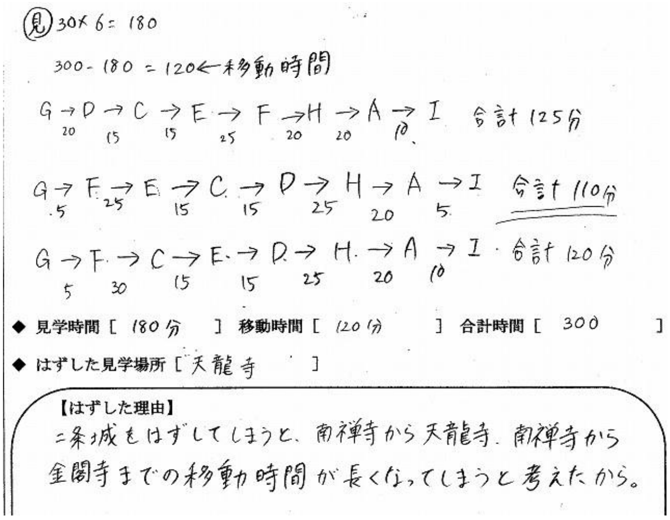


図10　生徒Ｍ・Ｙ

《東寺をはずす》

生徒 D.O のスケジュールマップとその根拠を示す（図 11，図 12）。図 12 ではＤ二条城→Ｈ清水寺→Ｉ京都駅の見学ルートをつくっているが，図 11 では，Ｄ二条城→Ｈ清水寺→Ｉ京都駅ではなく，Ｄ二条城→Ｈ清水寺→Ａ東寺→Ｉ京都駅とＡ東寺を見学ルートに組み入れ，７ヵ所すべてを見学するルートをつくっている。その根拠を見学時間が少しでも短くなれば京都駅から一番近い場所にあるので，東寺にも行くことができるとしている。これは，5 時間以内に７ヵ所すべてを見学するルートをつくりたいという価値観を実現す

るために，1ヵ所の見学時間を 30 分とするという基準を変更している。この基準の変更により，自分の納得する見学ルートをつくるという解答を出していることがわかる。これは，D-6 快楽性・愉悦性に加え D-3 責任性・自律性が示されていると考える。

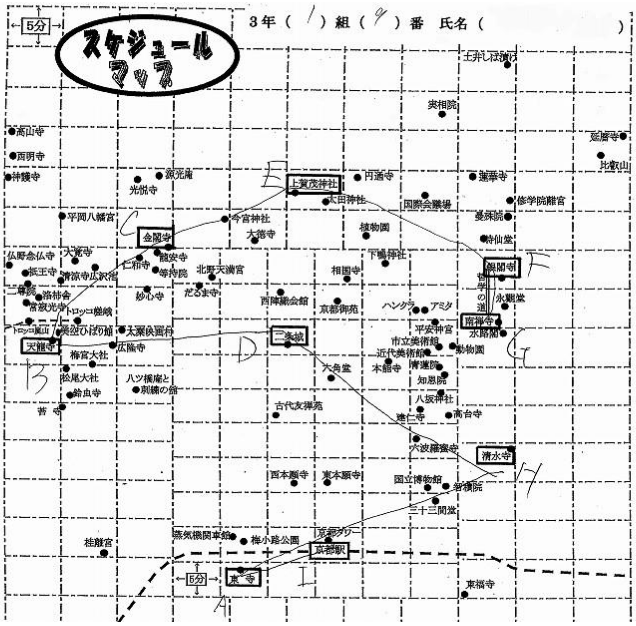
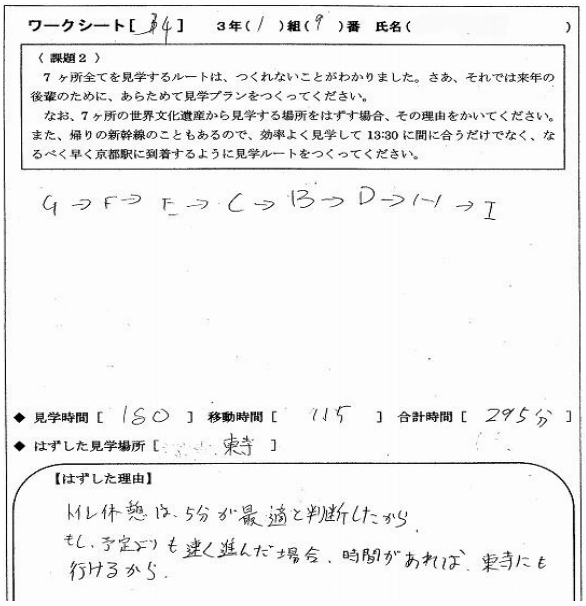


図 11　生徒 D・0


ワークシート［34］　3年（1）組（9）番　氏名（ ）

（課題２）
７ヶ所全てを見学するルートは，つくれないことがわかりました。さあ，それでは来年の後輩のために，あらためて見学プランをつくってください。
なお，７ヶ所の世界文化遺産から見学する場所をはずす場合，その理由をかいてください。
また，帰りの新幹線のこともあるので，効率よく見学して 13:30 に間に合うだけでなく，なるべく早く京都駅に到着するように見学ルートをつくってください。

G→F→E→C→B→D→H→I

◆ 見学時間［150］ 移動時間［115］ 合計時間［295分］
◆ はずした見学場所［東寺］

【はずした理由】
トイレ休憩は，5分が最適と判断したから
もし，予定よりも速く進んだ場合，時間があれば，東寺にも行けるから。

図 12　生徒 D.0

これらの授業課題を解決した後の生徒の学習感想例は，図 13～図 20 の通りである。

図 13，図 14 からは，これまでの数学とはちがっていることに触れられている。これは，この修学旅行見学ルートの授業が，数学の内容に依存していないことによるものと考える。

図 15～図 16 の授業感想例からは，使う数学の内容は平易であるが，どのようにその平易な数学を組み立てて構成するかということ，そして，その構成した中に生徒個々の価値観を織り込み，他の生徒に自分が構成したもののよさをいかに伝えていくかということの難しさやそのおもしろさが記述されている。

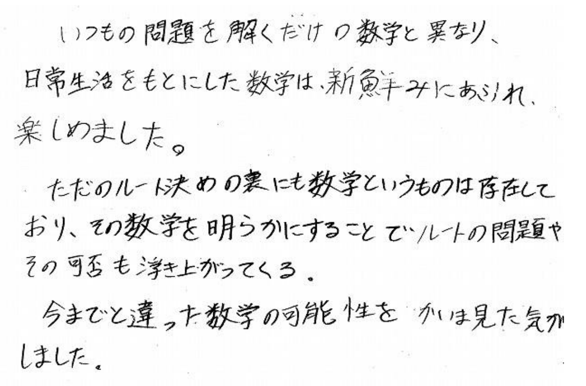

いつもの問題を解くだけの数学と異なり、日常生活をもとにした数学は、新鮮みにあふれ、楽しめました。
ただのルート決めの裏にも数学というものは存在しており、その数学を明らかにすることでルートの問題やその可否も浮き上がってくる。
今までと違った数学の可能性をかいま見た気がしました。

図 13　授業感想例 1

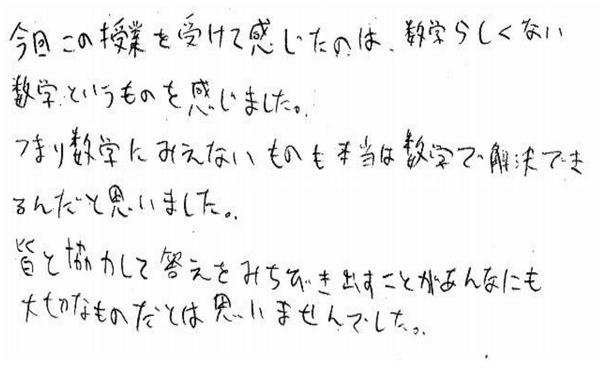

今回この授業を受けて感じたのは、数学らしくない数学というものを感じました。
つまり数学にみえないものも本当は数学で解決できるんだと思いました。
皆と協力して答えをみちびき出すことがこんなにも大切なものだとは思いませんでした。

図 14　授業感想例 2

このような方法で数学を使うのは初めてでした。
いろいろな所で、数学が関係しているだと思いました。
使う計算は簡単でも、よく考えないとできないような
問題でおもしろく感じました。
また、色々な考え方や、方法があって、とても
興味深かったです。
数学はどんな舞台にものせられる
無限なものだと思いました。

図 15　授業感想例 3

「これは無理」「あり得ない」「成り立たない」と言うのは簡単ですが、
それらを根拠を提示して証明するのは少し手間がかかるなと
思いました。
数学の証明のとき、「～よって」「だから」「～より」という言葉を
使いますが、私はそれが日常生活に活かされている、あるいは
自然と活かしていると思います。
例えば、本を読まずして作家、作品をけなしている人や、
音楽を聴かずしてアーティストをけなしている人がいますが、
理論だてて反対する、批判することとけなすことは格が
違うと思います。
話が脱線しましたが、
今回の授業では、「理論立てて説明する」
ことの大切さ、大変さを改めて知ることができました。

図 16　授業感想例 4

図 18 の授業感想例からは，授業の中で数学的にコミュニケーションをとることの楽しさが述べられている。図 19 の授業感想例からは，数学的な根拠を述べたり社会的価値観について触れ根拠としていることから，国語的な授業の内容が感じられたとの記述である。

「7つの場所を見学することは不可能だ。」というものを説明するよりも、「で
きるだけ多くの場所を見学するには、このようなルートを使えばよい」
ということを説明することの方が難しかったです。
「何となく」という考えで組み立てたわけではないので、そこには必ず
何らかの根拠や思考があった筈なのに、数学的に説明すること
がうまくできませんでした。
しかし、これらの説明に使った考え方はそんなに難しいものでは
なかったと思うので、その時その時に、ふさわしい考え方を見つ
けて納得がいくように説明できるようになることが必要だと
感じました。

図 17　授業感想例 5

いつもとは少し違う授業形式で、とても新鮮だった。
自分と同じ意見の人同士で集まったり、異なる意見を
持つ人の発表をきくのはとても面白かった。

図 18　授業感想例 6

通常の数学の授業と違った数学をやってみて
本当の意味でこれからの日常生活に大きく
関わってくるものだと思いました。
今回の数学は、計算だけでなく、国語力
まで含まれていたと思います。
とても今までと違う数学の考え方が
少し難しかったけれどもしっかりやりき
れて良かったと思います。

図 19　授業感想例 7

6.9.5　成果と課題

図1の京都散策マップから図2のスケジュールマップと表1の京都移動時間早見表を使うことにより数学の問題として考えることができるようになる。また，移動時間や見学時間を理想化するなどの A-1 定式化を行った。A-2 数学的表現では，B-2 図形的表現を使うことにより選択支援の C-1 シミュレーションを行うことができた。5 時間（300 分）以内で世界文化遺産の 7 ヵ所を見学するルートをつくることが可能か不可能か，その根拠を数学を用いて探すことになる。この根拠を探すために，この授業では，個別解決→グループ活動→話し合い→発表→考え方を共有，という授業を通して C-1 数学的コミュニケーションの力を高めることができた。

7 ヵ所を見学するルートをつくることが不可能であることが示され，全体で確認された後，5 時間（300 分）以内で世界文化遺産 7 ヵ所から 1 ヵ所をはずして見学するルートをつくる「数学の問題」になる。この問題には「正解」は存在せず，どのような見学ルートをつくればよいかという価値基準が必要になる。それが A-6 数学的・社会的価値観であるととらえる。この授業では 300 分以内に見学ルートを納めるだけでなく，13 時 30 分までに京都駅に集合することから，なるべく早く到着できる見学ルートをつくろうとする D-5 効率性・有限性が価値基準になると考える。次に世界文化遺産 7 ヵ所から 1 ヵ所はずさなければならない。また，見学する順番も問題になる。これは，生徒がそれぞれの世界文化遺産の社会的価値観をどのようにとらえるかの問題になる。この 2 つの価値基準をどのように自分自身に納得させて，最良の見学ルートをつくるべきか，この価値基準を D-3 責任性・自主性，D-6 快楽性・愉悦性と考える。この授業を通して生徒に，数学の問題の解に社会的価値観をもつことの必要性をはぐくむことができたと考える。

世界文化遺産 7 ヵ所から 1 ヵ所をはずして見学するルートをつくる場面で，個別解決からグループ活動を行い，話し合い活動を行った（1 班から 5 班に分けてグループ活動を行った)。ところが，1 班ではずした場所を確認したところ，はずした場所が東寺・清水寺・天龍寺の 3 ヵ所に分かれていた。2 班も同様に 3 ヵ所に分かれていた。そのため，急遽，グループを解体してはずした場所同士で再度グループをつくり，話し合い活動を行わせ，そのグループで発表を行わせた。

3 年 1 組の場合，1 ヵ所はずした場所のそれぞれの人数は，図 22 の通りである。
これは，社会的価値観を解に織り込むことにより，図 22 からわかるように幅広い選択肢を検討することができたことがわかる。

金閣寺（0 人）　,	**天龍寺（10 人）**
清水寺（15 人）　,	**銀閣時（0 人）**
二条城（0 人）　,	**東寺（1 人）**
上賀茂神社（4 人）	**計（30 人）**

図 22　3 年 1 組

また，この結果からわかるように，東寺をはずしたのは，生徒 D・O の 1 人であった（図 12，図 13)。発表の場面でも生徒 D・O は，1 人で自分の社会的価値観を根拠を用いて発表することができた。生徒 D・O の発表からも，わかるように基準や仮定を変更することによる見学ルートの作成を通して，数学的・社会的価値認識から社会的価値による判断力をはぐくむことができたと考える。

課題としては，グループの構成を，はずした見学場所同士で再編成したことである。1・

2 班が，はずした見学場所が 3 ヵ所に分かれた場面を，より高い判断力を高めることができる場面としてとらえることにより，3 ヵ所に分かれた同じグループの中で話し合い活動を続けることも考えられる。違った社会的価値観をどのようにまとめて高めていくのかという過程を通して，より高い数学的判断力をはぐくむことができると考える。もう一度授業を行うとしたら，上記の課題で述べたようにグループの構成を考えて授業を行いたい。

注

１）この「スケジュールマップ」及び「京都移動時間早見表」は株式会社日本旅行により発行されたものである。

引用文献・参考文献

浜田兼造（2012)，「日常生活と数学をつなげる力の育成をめざして－「修学旅行のルートを決定しよう」を題材として－」，日本数学教育学会『第 94 回総会特集号』，p.364

文部科学省，『中学数学学習指導要領解説　数学編』（平成 20 年９月）

島田茂（1996)，『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』，東洋館出版社，pp.9-21

長崎栄三（2001)，『算数・数学と社会・文化のつながり』，明治図書

西村圭一・長崎栄三（2008)，「数学教育における算数・数学と社会をつなげる力の意義と学習指導に関する研究」，日本数学教育学会誌第 90 巻第 9 号，pp.2-12

西村圭一・山口武志・久保良宏（2011)，「数学的判断力の育成に関する研究－その意図と授業の枠組みとについて－」，日本数学教育学会第 44 回数学教育論文発表会論文集，pp.237－242

Ｒ.Ｊ.ウィルソン（2010)（西関隆夫・西関裕子共訳)，『グラフ理論入門 原書第４版』，近代科学社

るるぶ情報館，『京都るるぶ 11～12』，ＪＴＢパブリッシング

（資料）研究協議の記録

平成２４年２月１５日（水）の授業は，イギリスからお招きした，マルコム・スワン先生，アリス・オニオン先生，ハドソン・ドミニク先生，畠中倖さんにも参観していただいた。(授業及び研究協議の発言は，ワイヤレスシステムにより，逐次翻訳が伝えられている。)

以下に，授業後の研究協議の記録（抜粋）を示す。

（敬称略）

Q：<u>今日の教材のどこに数理・数学がありますか？</u>

浜田：実は前回の授業で２人ほど生徒が「先生，これって数学なんですか？」と聞いてきました。まず修学旅行の問題では，７箇所巡ることは“不可能”であるということをわざと最初のほうで生徒に投げかけました。すると生徒は，数学は解けて当たり前，先生が解けない数学を出すわけがない，と思っているので一生懸命に問題に取り組みました。しかし，時間をかけたところでうまくはいかないので，生徒の１人が「これ無理なんじゃない？」とぼそぼそっと言いました。するとそれに対して別の生徒が「いや，無理じゃないよ」と言いました。そういった掛け合いが授業の中で続いていきました。ここで，無理か無理でないかをいくら議論したところで結論はでないわけです。

なぜならあくまで仮定の話ですから。なので，無理なら無理できちんと根拠をもって主張しようではないかということで，授業が進んでいきました。つまり，数学というものは定理を用いてエレガントに解いていくものもあるが，それだけではないのではないか。確かに（今回）加法・減法しか使ってはいないが，どう組み立てて他の人に納得してもらえるかということに数学を使うのではないだろうかと。使っている数学の難しさではなくて，易しい数学であってもそれをどう構成していくかという，その部分も数学であるということを生徒に伝えると，生徒は納得したようであの授業になった訳です。班を作り，話し合わせて，発表させる。そこで無理である，ではどうしようか，ということで今日の授業につながってきたのです。ですから，そこの部分だけでも十分に意味があるものであると考えます。

さらに，考える過程で，（三角形を用いて）図形的に捉えたり，早見表の中で一番短いところを追っていく，順路を考えていくといった作業を生徒はしていました。正しいかどうかは別として，そういう意味では十分数学になっているのではないかと自分は考えています。使っている数学は加法だけですが，構成している部分というところで思いました。

ただ，今日（のクラス）に関しては，前の時間で失敗しました。何故失敗したのかというと，１つ外すことに関して，ただ新しいプランを作ってごらんとしか言いませんでした。つまり，新しいプランを作って後輩に提示するわけですが，新しいプランの価値は何なのかということに言及しなかったということです。そのため，子どもたちは１個（ルートを）作ったらあとは授業に向かなくなってしまった。つまり，子どもたちのモチベーションを保てなかったということです。また，ある班は何故そこを外したのかという理由に，別の班はいかに早く行くかというところに価値を求めていました。最短ルートを考えること，そこを外すということに関してその価値はなんなのか，ということを明らかにさせることによって，子どもたちの意識のようなものを出させるべきであったと感じました。

Q：生徒は何をすべきかはわかっていた，しかし何を学ぶべきかはわかっていなかったのではないでしょうか？

浜田：その通りです。今回の授業に関しては，非常に抑えが甘かったです。前回は，不可能であるということをきちんと推測し証明することができました。今回の授業で，１つは価値というところにいきましたが，そこからさらに深めるべきだと自分も思っています。あの終わり方，あるいはこれから何を数学的に出すのかということは，これからやらなければならないことだと考えています。

Q：今日考えた見学ルートのどれが一番良かったという価値付けはどうするのですか？

浜田：今回はまだ２時間目なので，次の授業ではワークシートを集めて，意見を述べさせて，そこで深めさせようとは思っています。ワークシートを２枚子どもに配布させていますので，その２枚を集めて，それで発表させて，どれがいいのかということは，子どもたちが何故それを選んだのかということは私も聞きたいので，そこはやります。

Q：子どもたちが言っていたことの中で今日の価値付けにおいて，より良い考え方，そうでない考え方あったんですか？

松嵜：以前研究会のときに，浜田先生がこの指導案を提案されて，そのときから私は非常

にこの教材が気に入っていて，良い題材だと思っています。今質問がいくつかありましたけれども，数学が加法だけとおっしゃいましたが，そんなことはありません。非常に豊富な数学がこの教材には含まれています。例えば，京都は碁盤の目上に道がある訳ですが，それぞれの文化遺産含めた様々な観光スポットが点で配置，表わされていますよね。しかしながら，そのうちで世界文化遺産を巡る，タクシーのルートというのは，当然道に沿って進みますよね。それを線で結ぶ訳ですよね，直線で。結んでいっても，そこ（その直線）でタクシーは 5 分で行けるとか，10 分で行けるとみなしている訳ですよね。そこに必要ではないけれどももっと分かりやすい数学的な表現を使って表しているかだとか，そういうところにまず数学的価値があります。有名なもので，「ケーニヒスベルクの橋」の問題がありますけれども，それこそ，1 つの数学的モデルとして見ることができる，あるいは様々な表やデータからそういうものを組み込んで新しい数学的モデルを作っていく，という作業が新しい数学になっていくと考えています。それがおそらく子どもたちにとっては当たり前すぎて，何をやっているのかわからなくなってしまったのだと思いますが，それは新しい数学への価値につながっていくと思っています。私は，これから，新しい数学的な見方・考え方として大事になってくることではないかと強く思います。

また，先ほどコメントにも出ていましたが，1 箇所外す理由について，今日の班は効率良く回るために時間を短縮するということだけに焦点を当てていましたが，東寺を外すと言った 1 人の男の子がいましたよね。あの子の答え，非常に素晴らしいと思います。何が素晴らしいかと言うと，東寺を外したという理由が，京都駅にまず近いから。当然京都駅に行くためには，近鉄奈良線などを使えばすぐ行けますが，歩いて行くことはできない，バスなど使えばすぐ行くことができます。時間が余ったならば寄ることできるから，欲を言えば 7 箇所回れるということなんですよね。そこに，「社会的価値観」なども入ってきますし，当然数学的処理もしています。その両方がうまくはまった，すごく良い答えだった気がします。今回，“社会的文脈における”といったことが頭ありましたので，社会的価値観をどこまで組み込んで数学的処理し，それが現実世界の中でどこまで価値付けられているか，ということができるようになって欲しい，ということがこれからの新しい数学教材の在り方であると思います。今回の授業は，それを示すすごく良い事例ではないかと思っていました。

西村：Bowland Maths の教材に，ツアーコンダクターになって，時間と予算の中でどう回るかというものを決めるものがあります。ツアーに参加する人の希望も示されます。コンピュータソフトがあり，作成したツアーの評価がお客様の満足度として出るようになっています。そうすると，単に時間内に収めれば良い訳でもなく，かといって，もうけもださなければいけないので，満足させるだけで良い訳でもない。様々なことを天秤にかけながら良いものを探っていく，このような考えをすることは，おそらく現実社会には本当は多いことでしょう。そこまで Bowland Maths の中でやっているということはすごいと私は思っています。何も知らずにその教材を見ると「何故ゲームをやっているのだろう？」と思うかもしれないです。

Q：（授業の）最後のほうでまたグループを組んでいましたが，“どこを外すか”ということでグループ分けをされていました。もしもそのようなグループ分けをしないで，全

体でディスカッションをすれば，5 分～10 分短くすることができるなどのオプションも考えられる，その理由づけをするといったようなことも（全体で）できたのではないかと思うのですが，どうしてグループ分けを，しかも“どこを外すか”という基準で分けたのか理由をお聞かせください。

浜田：実は，あのようにグループ分けすることはまったく考えてはいませんでした。何故かと言いますと，私自身はそれぞれ班で発表すれば良いだろうと考えていたからです。実は，（席が）前の方の班に「どこを外したんだ？」と聞いたところ，班内で（意見が）３つに分かれていたんです。そのことを聞いた瞬間に，班内で３つに分かれているということは，班ごとで発表しようとしたら，１つの班で３グル―プ出ることになります。そうすると全部で 15 グループほど出ることになってしまいます。15 グループが前で発表することは不可能だと思います。少人数（１人など）のものは発表させないということにもしようとは考えたのですが，それはやめました。なので，あのとき（グループ分けのとき）ごたごたしてしまったのですが，（外す場所ごとでの）グループに分けるしかないと思い，（外した場所ごとに）手を挙げさせ，人数をみながらそうしました。結果的には良かったと思います。

清水：１つ外した場所ごとにグループとして集めることによって，意見をそれぞれ持ち寄ってどれが最短であるなどの議論ができますよね。それはそれで私は時間があれば，その中でベストを話し合って決めたりなど，面白くなったのではないかと思います。そのようなことも考えられてあのようなグループ分けにされたのかと私は思いました。

浜田：あれはドラッグストアの問題と同じ形です。つまり，同じ考えの生徒を集めるという形です。共有したり議論するということは，あの子たちにとってすごく苦手なことなのです。ですから，（班内で）３つに分れたときに，どの班もコミュニケーションがなかったんです。自分たちのことだけで一生懸命になっていて，中での交流がなかった。あれは交流がないわけではなくて，自分たちとまったく違う（考えの）グループがいるために，交流しようがなかったのだと思います。だから，同じ考え同士を集めることは，本当は先生方がおっしゃるように時間があればおそらくあの子たちはもっと仲良くやっていたかとは思います。互いに価値観が一緒の集まりですから。そうしたら，どこで最短になるかということももう少し話せたのかと思います。

（西村）

これまでも議論してきたことだが，教師にとって「用いる数学が易しく感じられる教材」の価値を示す必要があることを痛感した。（この教材には，図や表の活用，仮定をおく，トレードオフなど，従来の算数・数学で強調されていない考え方が多数含まれている。）日本の数学的な考え方の「評価規準」をみてみると，内容への依存度が高く，内容理解とプロセス能力が並行して伸びていくことを暗黙の前提としているように感じる。

イギリスの BM を用いた授業と比べると，グループ活動での話し合い，発表に対する反応の質に課題がある。グループ活動については，BM の教師教育モジュールでも取り上げているテーマであり，「スノーボールアプローチ」（ペア→グループ→クラスと次第に広げていく）をすすめている。浜田先生の授業では，「個別解決→意図的なグループ分け→話し合い→発表」というスタイルだった。

6.10　どちらのドラッグストアが得かな

さいたま市立大宮東中学校
浜　田　兼　造

概　要

2つのドラッグストアが発行している割引カードについて，どちらが得になるかを考える教材を開発し，数学的・社会的価値認識による判断力をはぐくむことを目的として，中学校3年生に対して授業を行った。2つの割引カードの関係について，代数的・関数的にとらえることにより明らかにし，条件を変更することにより新しい割引カードをつくる活動を行った。生徒のワークシートや学習感想より，よりよい割引カードをつくる基準をグループ活動を行うことにより高めることができ，新しい割引カードに対する価値観を数学的・社会的価値認識に求めることにより，社会的価値による判断力をはぐくむことができたと考える。

6.10.1　教材について

太郎君の家から歩いて5分の所に薬アイジョーがあり，太郎君はそこでよく買い物をしています。

ところがこの6月に自転車で30分の所に新しく薬ヤスモトが開業しました（**図1**）。2軒のドラッグストアは，8月に向けた還元大安売りで割引カードを配りました。太郎くんのところにも**図2**と**図3**の2種類の値引きカードが郵送されてきました。

薬アイジョーは家から近いし，これまですべてそこで買い物をしていたので，太郎くんは薬アイジョーにしようかなと思いましたが，薬ヤスモトの割引カードも魅力的に思えました。家から少し遠いけれど，薬アイジョーより安くなるなら，行ってもいいなとも思いました。さて，太郎くんは，どちらのお店で買い物をした方が得でしょうか。チラシを見ながら考えてください。

図１［地図］

この教材は，右の図2，図3のような2軒のドラッグストアが配布した割引カード[1)][2)]を取り上げ，どちらで買った方が得かについて考察する。

「薬ヤスモト」は，購入した金額の15%が値引きになるカード（図2）を発行している。このカードは1度だけ使用することができ，購入する金額に制限はない。

図2［薬ヤスモト］

図3［薬アイジョー］

「薬アイジョー」は，1 回目から 3 回目まで買い物に行くことにより値引きになるカード（図 3）を発行する。1 回目の買い物では 250 円の値引き，2 回目の買い物では購入した金額の 10%の値引き，3 回目の買い物では 400 円の値引きが行われる。ただし，「薬アイジョー」は，1 回目から 3 回目の買い物でそれぞれ 2,000 円以上を使わなければいけないという制限が設けられている。

〈課題 1〉 **2 軒のドラッグストアは，8 月の還元大安売りで割引カードを配りました。太郎くんは，図 2 と図 3 の割引カードを使って買い物をしようとしました。太郎くんは，どちらのお店で買い物をした方が得でしょうか。** **チラシを見ながら考えてください。**

「薬アイジョー」のカードが使用できることを前提にしなければならないので，1 回目・3 回目の購入金額は最低金額の 2,000 円，2 回目の購入金額は 2,000 円以上，合計で 6,000 円以上の買い物をすると仮定する。さらに，次のような仮定の設定及び条件の整理を行う。

ア）**「薬アイジョー」の 2 回目 10%の値引きの時に支払う正規の金額**を決め，それに対して**それぞれ 2 つの割引カードで値引きになる金額**を比較する。

イ）**「薬アイジョー」の 2 回目 10%の値引きの時に支払う正規の金額**を決め，それに対して**それぞれ 2 つの割引カードで支払う金額**を比較する。

なお，「値引きになる金額」と「支払う金額」は，次のように定義する。

「値引きになる金額」: 250 円引き，400 円引き，及び 10%の値引きされる金額の合計と 15%の値引きされる金額をそれぞれ表す。

「支払う金額」: 正規の買い物の金額から値引きされる金額を差し引いた金額を表す。

例えば，「薬アイジョー」の 2 回目 10%の時に支払う金額を x 円，それぞれ 2 つの割引カードで値引きされる金額を y 円とすると，y は x の 1 次関数として表すことができる。1 次関数として表現し比較した結果，「薬ヤスモト」が「薬アイジョー」より優位であることがわかる。

そこで，「薬アイジョー」の割引カードの条件を変更することにより，「薬ヤスモト」より「薬アイジョー」の割引カードを優位にすることができないかということを考える。

〈課題 2 〉 **「薬ヤスモト」に対抗して「薬アイジョー」では支店長会議を開いて，現在の割引カードを新しく作り替えることにしました。どのように作り替えれば，お客様が「薬アイジョー」に来てくれるようになるでしょうか。** **支店長会議を開いて対策を考えてください。**

課題 2 では，買い物の総額は，6,000 円以上であるとし，次の 2 つの観点から考える。

《観点１》１回目，３回目の値引き金額の引き上げ

250 円値引き，400 円値引きの金額を引き上げる。

（例）それぞれ 100 円上げ，1 回目が 350 円値引き，3 回目が 500 円値引きにする。

《観点２》２回目の値引き割合の引き上げ

2 回目の買い物の 10％値引きの割合を引き上げる。

（例）2 回目の割引の割合を 13％の値引きにする。

このように条件を変更し，「薬アイジョー」の方が得になるようなカードを作成する。

6.10.2　数学的判断力に関する枠組みとの関連

A：プロセス能力

- A-1：定式化　　A-2：数学的表現
- A-3：数学的推論・分析　　A-4：解釈・評価
- A-5：数学的コミュニケーション　　A-6：数学的・社会的価値認識

B：数学の内容

- B-1：代数的
- B-3：関数的

C：選択支援

- C-1：シミュレーション

D：社会的価値認識

- D-2：多様性・多面性・協調性
- D-3：責任性・自律性

6.10.3　授業の実際

日時：平成 24 年 10 月 12～17 日までの数学の時間 4 時間

対象生徒：さいたま市立中学校 3 年 4 組（男子 18 名　女子 14 名　計 32 名）

プロセス能力については,水準 1 から水準 2 にある生徒が混在していると考える。

授業展開上の工夫：

課題 1 については，初めは個々で取り組ませるが，途中からグループをつくりグループで課題に取り組ませる。課題 2 については，初めからグループ活動を行う。グループごとにさいたま市の区の名前をつけて，区にある薬アイジョーの支店長という立場で考えさせるようにする。

また，授業のおわりには，班ごとに作成した新しい薬アイジョーの割引カードの 1 回目・3 回目の値引きの金額，2 回目の割引率を提示し，その根拠及び割引カードのよさを発表する。発表を聞いている他の班は，発表された班の新しい割引カードについて，ワークシートにその評価・感想を書くようにする。

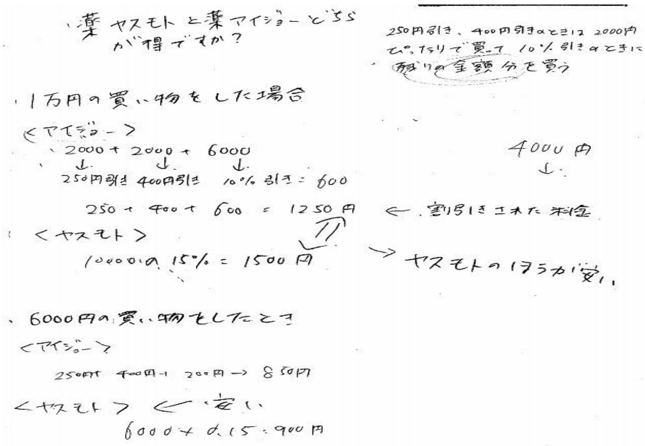
授業展開の概要：

数学的な問題場面をつくる：

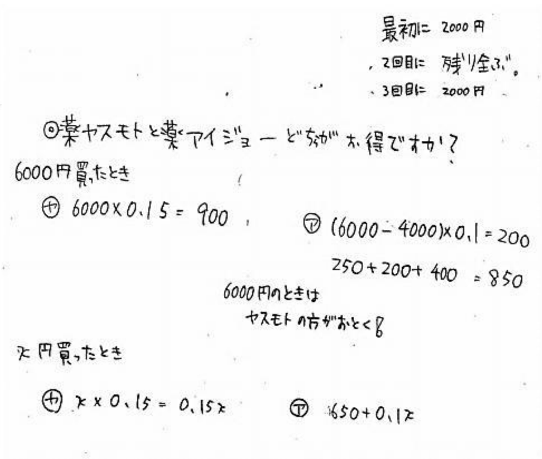
課題 1 を提示して，2 つのドラッグストアの割引カードの使い方について説明した。その上で，どちらの割引カードが得になるか考えさせた。ただし，結論をただ記述するのではなく，必ずその根拠を記述することを要求した。

例 1 は，2 つの割引カードの使い方をよく理解し，10,000 円と 6,000 円の場合で比較し薬ヤスモトが得になることを示している。例 3 は，具体的な数で比較するだけでなく，薬アイジョーの 2 回目の購入金額を変数 x と置いてそれぞれの値引きになる金額を式で表現している。2 人の生徒に共通しているのは，値引きになる金額で 2 つのカードの優位性を比較している点である。

例 1　10,000 円と 6,000 円の場合で比較

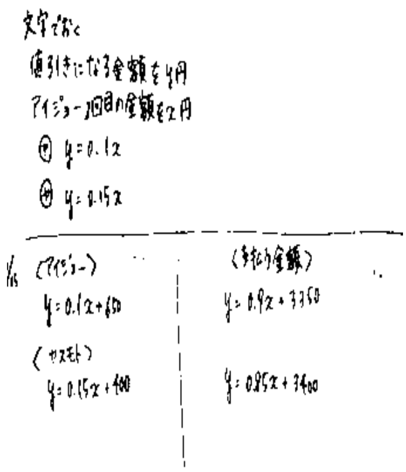


例 2　変数 x で置いた場合の比較



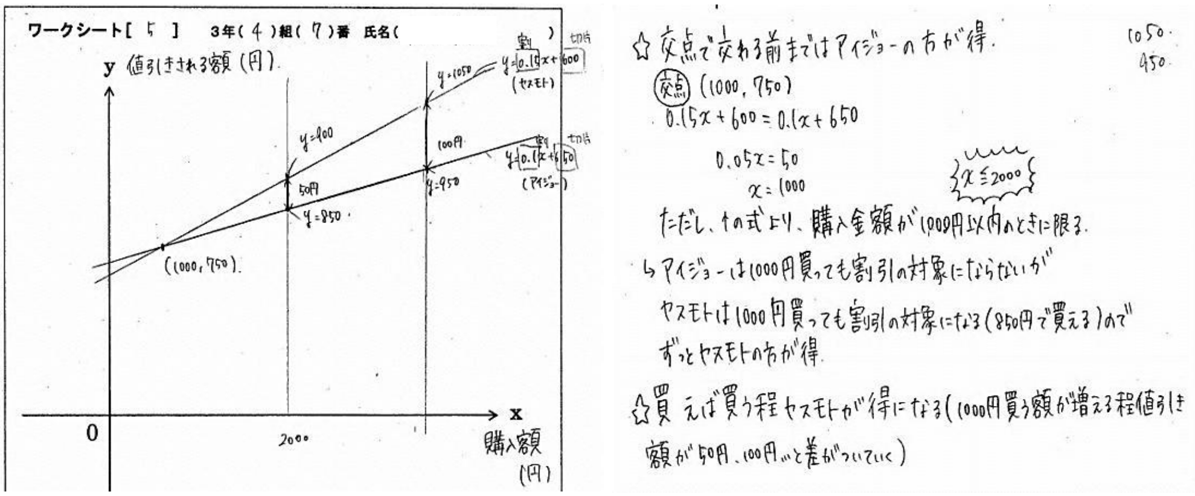
数学的な問題場面に取り組む：

例 3 方程式での表現



2 つの割引カードの優位性の関係はどうなっているのだろうか，ということについて考察する。例 3 は，y が値引きになる金額と支払う金額の 2 つの場合について，それぞれ方程式で表現している。例 4 は，2 つの割引カードの値引きになる金額を y 軸，薬アイジョーの 2 回目の購入金額を x 軸としてグラフで表現している。さらに，交点 x=1000 までは薬アイジョーが優位になるが，薬アイジョーは購入金額が x=2000 以上でなければならないため薬ヤスモトが優位になることが記述されている。さらにグラフから x の値が 1000 増加するごとに値引きされる金額 y が 50 ずつ増加することに触れている。

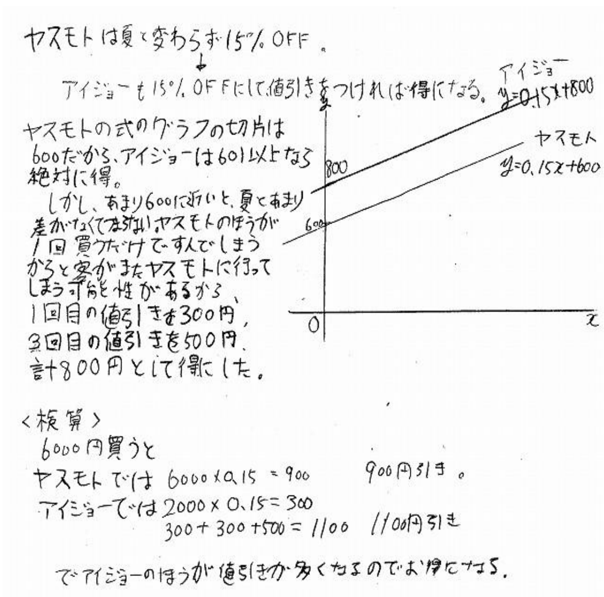
例 4　数学的表現



課題 2 を設定して，数学的な問題場面に取り組む：

課題 2 を設定し，C 選択支援として，C-1 シミュレーションを行う。課題 2 に取り組むために，クラスを 6 つの班に分けて，それぞれの班にさいたま市の区の名前をつけた。班員は，区の中にある薬アイジョーのそれぞれの支店長であるとした。課題 1 より薬ヤスモトに優位性があり薬アイジョーにはお客様が来店しなくなることがわかっているので，12 月の年末大安売り感謝祭に向けて薬ヤスモトより優位に立てる新しい薬アイジョーの割引カードをつくることにする。

例 5 生徒の割引カード



次に生徒がつくった新しい薬アイジョーの割引カードの例を示す。例 5 は，薬アイジョー割引の 2 回目の割合を 15%に変更した上で，さらに 1 回目と 3 回目の値引きの金額を変更して 800 円にしたグラフを表現している。

発表を行う：

班ごとに新しい薬アイジョーの割引カードを作成させた。そして，各班で作成した薬アイジョーの新しい割引カードについてその特徴とそのよさが示されるように発表を行った。各班の発表については，各班の発表に対して感想を書くようにした。

6.10.4　授業の考察

生徒の反応例から，上記の枠組みがどのように実践できたかを分析する。

（1）２つのカードの優位性について

課題 1 を提示して，2 つのドラッグストアの割引カードの使い方について説明した。その上で，どちらの割引カードが得になるか考えさせた。ただし，結論をただ記述するのではなく，必ずその根拠を記述することを要求した。生徒にとって，割引カードを使ってどちらが得になるかというような生活体験は皆無に等しいので，多くの生徒が得になることの基準をどのように決めればいいのかということにとまどっているようであった。例えば，図 4 は，買い物の金額の総額を 5,000 円から基準の 6,000 円に変更しているが，薬アイジョーの 2 回目の 10%値引きが購入金額全体にかかると考えて支払う金額を計算している。図 5 は，薬アイジョーの効率的な使い方は正しいが，薬アイジョーの 1 回目，2 回目，3 回目の値引きの枠を 1 つだけ使うものと考え，支払う金額を計算している。2 人の生徒の考え方に共通しているのは，支払う金額で 2 つの割引カードの優位性を比較している点である。

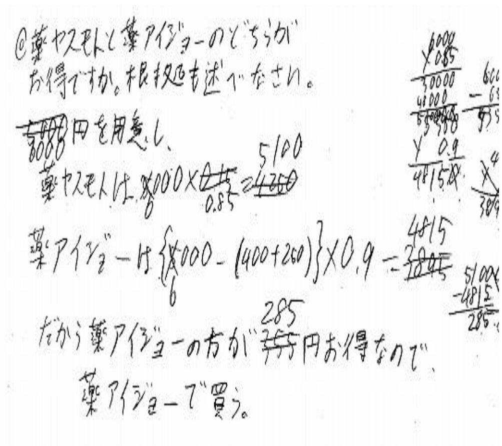


図 4　生徒 B.Z

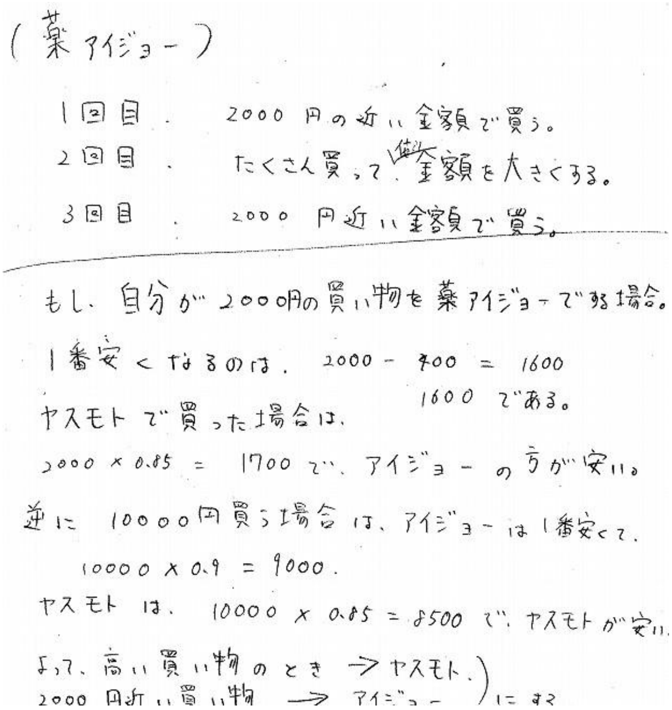


図 5　生徒 T.H

図 6 は，2 つの割引カードの使い方をよく理解し，10,000 円と 6,000 円の場合で比較し薬ヤスモトがお得になることを示している。図 7 は，具体的な数で比較するだけでなく，薬アイジョーの 2 回目の購入金額を変数 x と置いてそれぞれの値引きになる金額を式で表現している。2 人の生徒に共通しているのは，値引きになる金額で 2 つのカードの優位性を比較している点である。

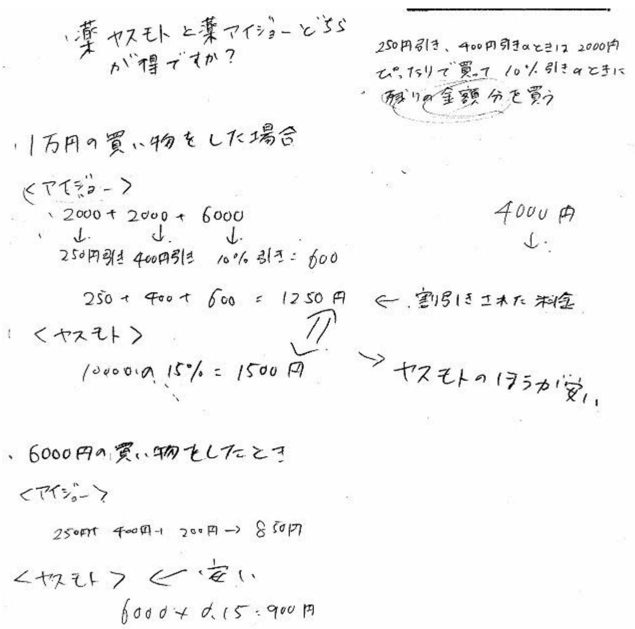


図 6　生徒 T.H

生徒に自由に考えさせた上で，カードの優位性を決定するためにどのように考えたらいいのか，その考え方を発表してもらうことにより，割引カードの使用方法について確認するようにした。

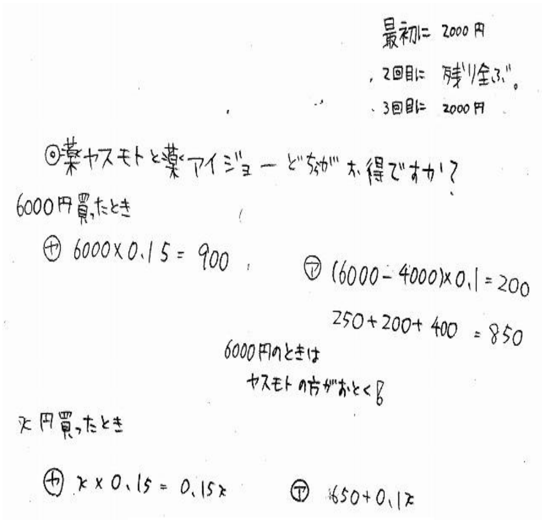


図７　生徒 K.O

S　先生，アイジョーは３回買い物に行かなければならないの

T　そうだね。アイジョーに３回買い物に行ったとして，どちらが得になるか考えてみよう。

S　３回買い物に行ったとして，２つの割引カードを比べるのか。

S　買うものは，同じにしないと比べられないな。

T　そうだね。チラシでみんなが買うものを決めたよね。その同じ物をアイジョーとヤスモトで買うことにしよう。

S　そうか。同じ物を１度にまとめて買う，３回に分けて買うということか。

S　買う金額はどうなるんだ。

S　アイジョーの１回の金額が 2,000 円以上だから，6,000 円か。

S　それじゃ，アイジョーもヤスモトも 6,000 円使うことにすればいいのか。

S　でも，アイジョーの２回目は 10%値引きだから，なるべくたくさん買う方が得だ。

S　そうか。アイジョーの２回目での買い物は，2.000 円以上買うようにすればいいのか。

生徒との話し合いの中で，次のような理想化・条件の設定を行うことにした。これが A-1 定式化を行うための基準になる。

① チラシを見て買う物を決めたが，その同じ物を薬アイジョーでは３回に分けて，薬ヤスモトは１回で買うことにする。

② 薬アイジョーの１回ごとの買い物の金額は 2,000 円以上でなければならないので薬アイジョーで得になる買い方は，１回目・３回目の買い物は 2,000 円，２回目の買い物の金額は 2,000 円以上の買い物をすると考える。

④　②より薬ヤスモトも薬アイジョーも買い物の総計金額は，6,000 円以上とする。

図８は図６の生徒 T.H が①～③の条件を設定することにより，改めて仮定で総額 6,000 円以上という条件を設定した上で，薬アイジョーと薬ヤスモトの割引カードの優位性を 6,000 円と 30,000 円の２つの場合で比較検討している。

具体的な購入金額を決めて2つの割引カードの優位性を比較検討した結果，薬ヤスモトが優位であるということがわかった。しかし，必ず薬アイジョーの方が優位になっているわけではない。

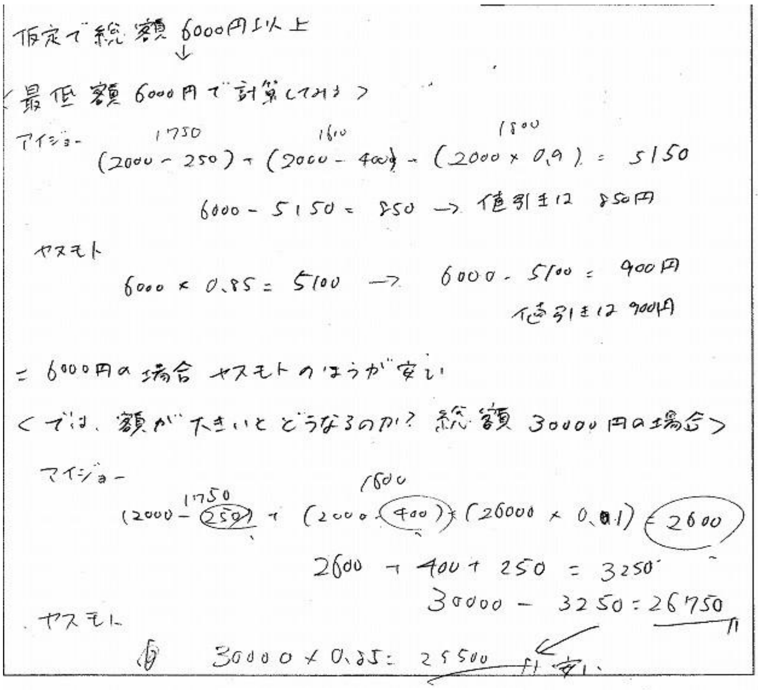

仮定で総額6000円以上
↓
<最低額6000円で計算してみる>
アイジョー 1750 1600 1800
(2000 − 250) + (2000 − 400) + (2000 × 0.9) = 5150
6000 − 5150 = 850 → 値引きは850円
ヤスモト
6000 × 0.85 = 5100 → 6000 − 5100 = 900円
値引きは900円
= 6000円の場合 ヤスモトのほうが安い
<では、額が大きいとどうなるのか？ 総額30000円の場合>
アイジョー
1750 1600
(2000 − 250) + (2000 − 400) + (26000 × 0.1) = 2600
2600 + 400 + 250 = 3250
30000 − 3250 = 26750
ヤスモト
30000 × 0.85 = 25500 円 安い

図8　生徒T.H

T　具体的な購入金額で計算した結果，薬ヤスモトの方が得になるということがわかったね。でも，いつも薬ヤスモトのほうが得になるのだろうか。2つの割引カードの関係は，どうなっているんだろうか。

T　それでは，どちらが得になるか，2つのカードの関係を明らかにしてみよう。どうすればいいですか。

S　具体的な金額では，薬ヤスモトの方が得だったけど。

S　どうしよう。

S　薬アイジョーの2回目が10%値引きだから，そこでたくさん買えばよかった。だから，そこを文字で置けばいい。

T　そうだね。文字を使うといいね。

T　それでは，薬アイジョーの10%値引きになる2回目の購入金額を文字で表してみよう。

S　文字で置いてどうする。

S　２つのカードの関係を表すにはどうしたらいいの。

S　方程式を使えばいい。

S　そうだ。方程式を使う。

T　そうか。方程式か。それはいいね。

T　方程式を使うという考え方が出たね。方程式の他には，2つの関係を明らかにものはないですか。

S　比べるのだから，比例はどうだ。

S　そうだ。関数を使うのもいいんじゃないか。

T　みんなから方程式，関数という2つの考え方がでました。それでは薬アイジョーの2回目の購入金額をx円としよう。

T　関数で表そうとしたら，比較するのだから比較するためにもう1つ比べるものが必要だね。

S　もう1つは，支払う金額。

S　まだある。値引きになる金額もある。

T　それでは，薬アイジョーと薬ヤスモトの割引カードの関係を明らかにしてみよう。

図 9 は，薬アイジョーの 2 回目の購入金額を 2000＋x 円と表現することにより，薬アイジョーと薬ヤスモトの支払う金額を表現している。2 回目の購入金額を 2000＋x と表現することにより，変数 x のとる値が 2,000 円以上であることを表現している。そして，2 つの式の比較から薬ヤスモトの割引カードが優位になることを示している。

図 10 は，値引きになる金額をそれぞれ式で表現し，2 つの方程式 y＝600＋0.15x と y=650＋0.1x の左辺を比較している。2 つの方程式の差より，50 と 0.05x の大小によって，薬アイジョーと薬ヤスモトの優位性が変化することを記述している。B 数学の内容としては，B-1 代数的表現を用いていることがわかる。

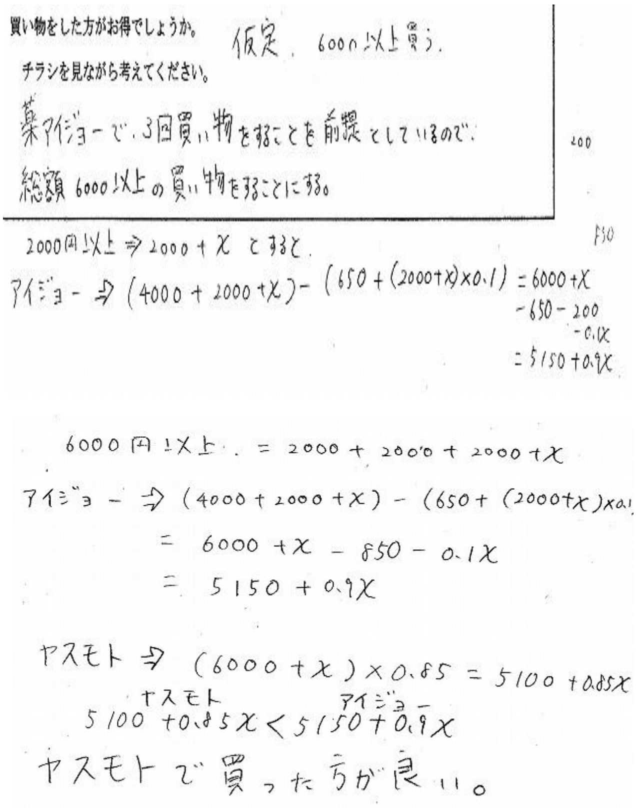


図 9　生徒 H.T

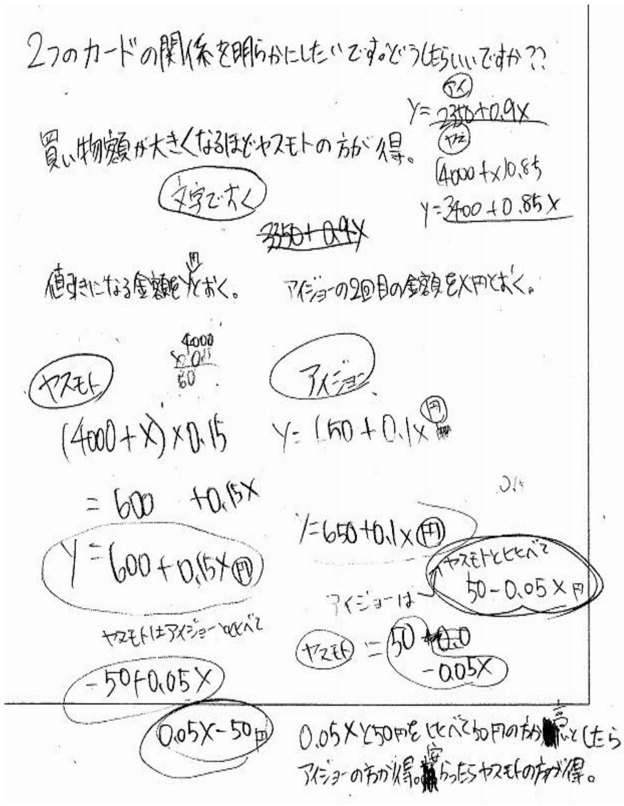


図 10　生徒 Y.M

図 11 は，y が値引きになる金額と支払う金額の 2 つの場合について，それぞれ方程式で表現している。図 12 は，2 つの方程式を連立方程式と考えることにより，その解の値が 2 つのドラッグストアの優位性を決める境の値になっていることを示している。

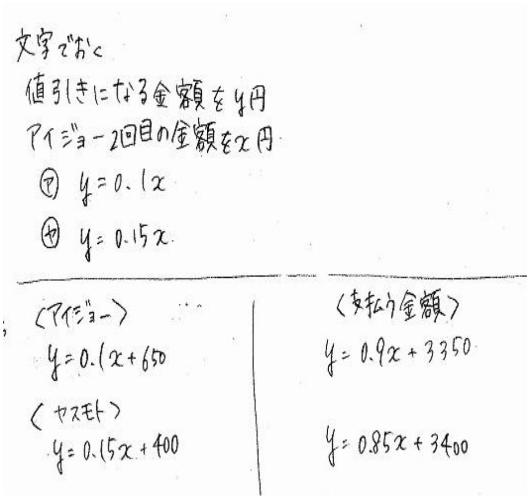


図 11　生徒 A.I

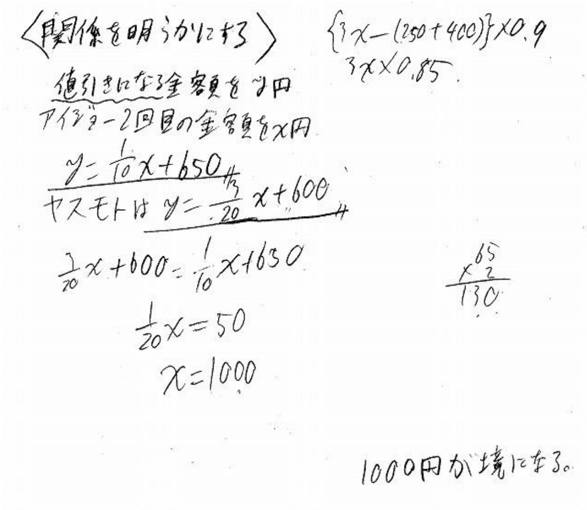


図 12　生徒 B.Z

T　2 つの方程式で表現し，連立方程式として解いてその解を求めているね。*x*=1000 が境になって 2 つのカードのどちらが得になるかが決まることがわかりました。
しかし，1,000 円が境になることは連立方程式の解からわかったけれど，2 つの割引カードの関係はよくわかりません。2 つの割引カードの関係をよりはっきりと分かるようにするためにはどうしたらいいですか。

S　グラフか。

S　グラフで表現すればいい。

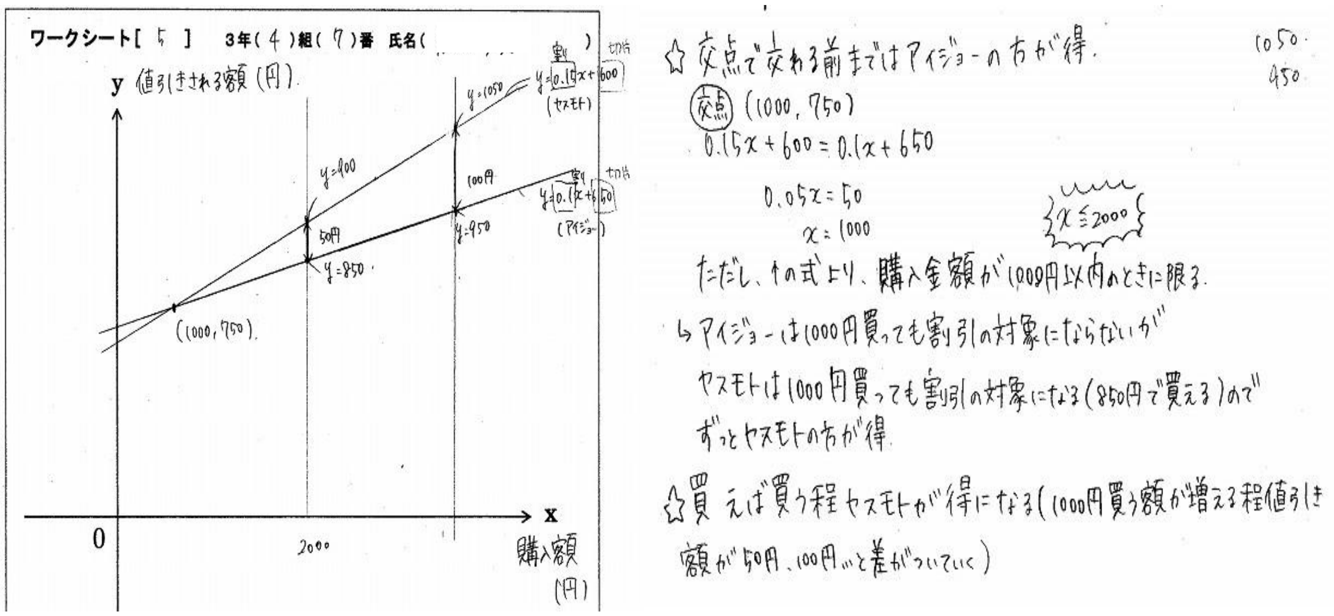


図 13　生徒 A.I

図 13 は，2 つの割引カードの値引きになる金額を y 軸，薬アイジョーの 2 回目の購入金額を *x* 軸としてグラフで表現している。さらに，交点 *x*=1000 までは薬アイジョーが優位になるが，薬アイジョーは購入金額が *x*=2000 以上でなければならないため薬ヤスモトが

優位になることが記述されている。更にグラフから x の値が，1000 増加するごとに値引きされる金額 y が 50 ずつ増加することに触れている。A-2 数学的表現として B-3 関数的表現がされている。

（2）新しい割引カードをつくることについて

課題 1 より薬ヤスモトに優位性があり薬アイジョーにはお客様が来店しなくなることがわかったので，12 月の年末大安売り感謝祭に向けて薬ヤスモトより優位になる新しい薬アイジョーの割引カードをつくることにした。次に生徒がつくった
4 つの新しい薬アイジョーの割引カードの例を示す。

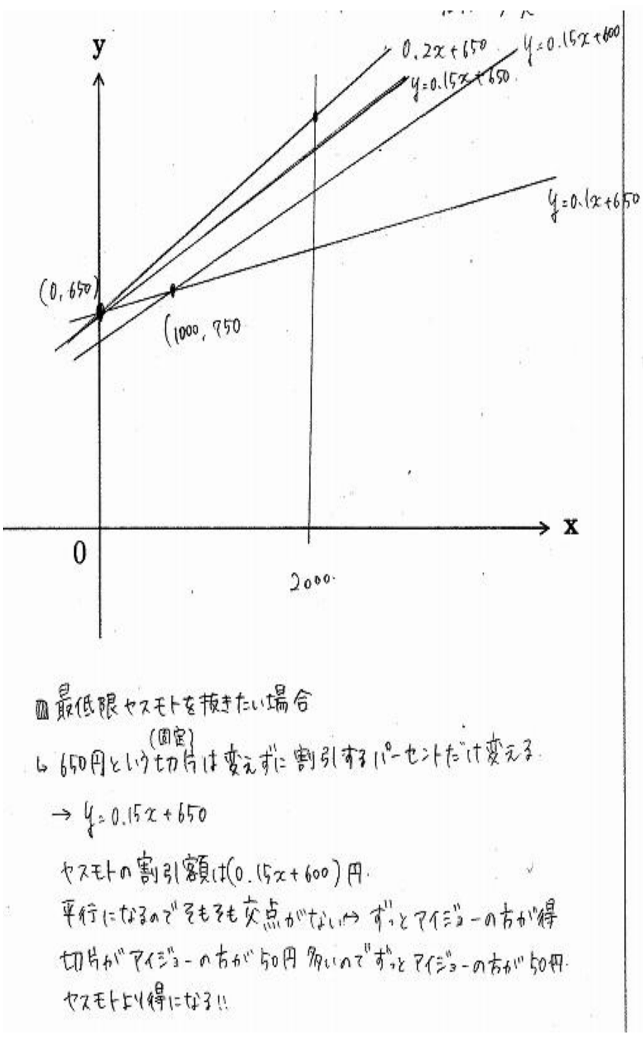


図 14　生徒 A.I

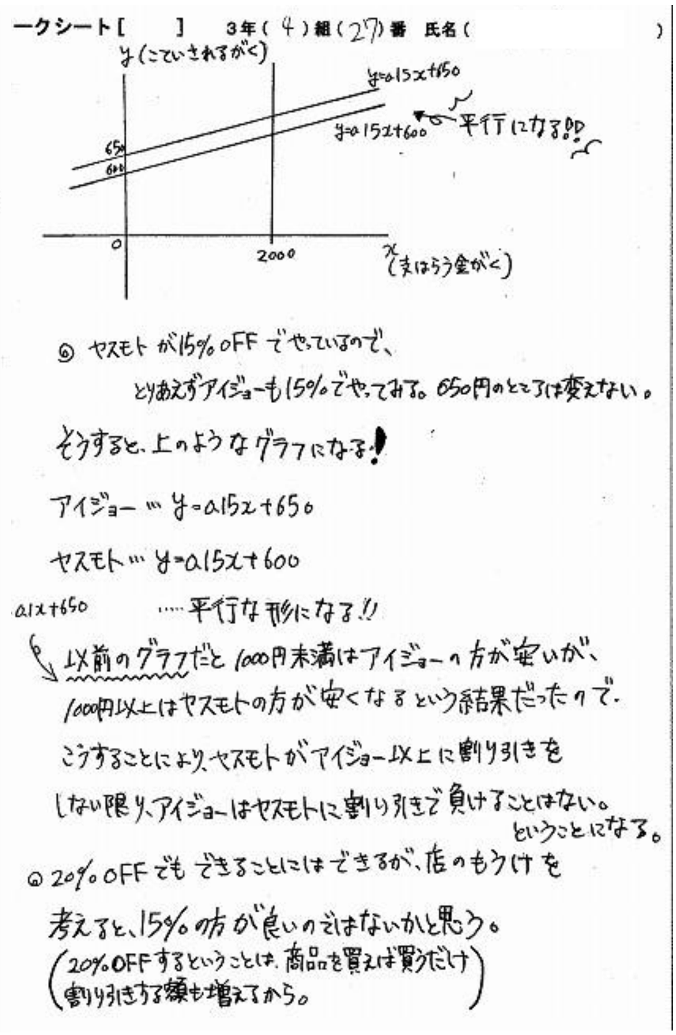


図 15　生徒 Y.M

図 14 及び図 15 は，薬アイジョーの 2 回目の値引きの割合を 15%，20%に変更する 2 つの場合を考えているが，傾きが同じになる 15%を選んでいる。図 14 は，20%の場合のグラフも表現している。図 15 は，グラフが平行になり交点がないことからすべての場合で薬アイジョーが優位になることを記述している。また，割引率が 20%についても触れているが，店の利益のことも考えて 15%を選択している。図 16 は，値引きの割合をアピールするために 2013 年に合わせて 20.13%に設定しているところである。さらに薬アイジョーの 1 回目と 3 回目の値引きの金額を,購入金額が 6,000　円のときに値引きの差が約 100 円になるように 100 円と 500 円に設定している。それがグラフに表現されている。

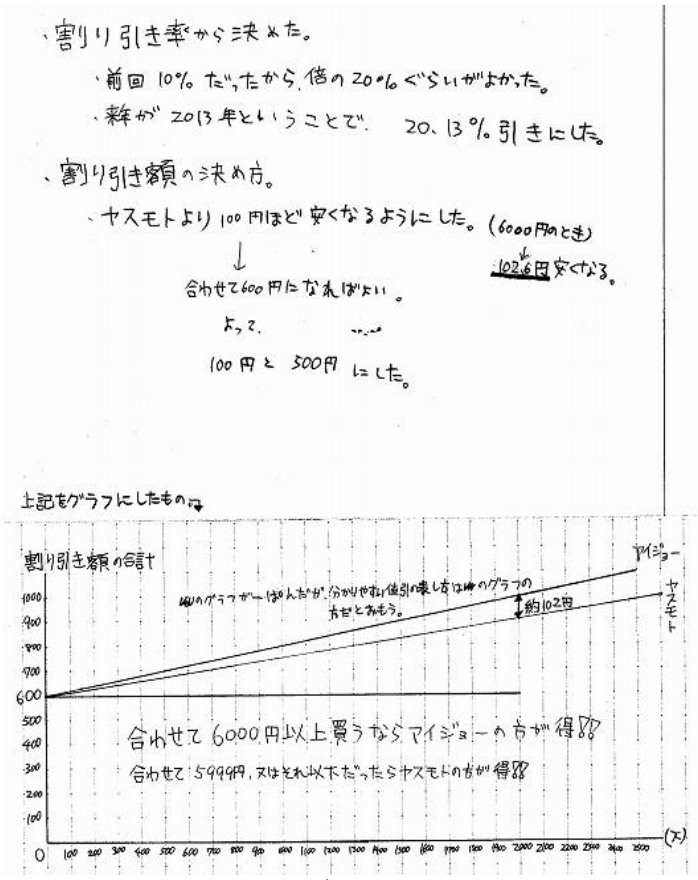


図 16　生徒 K.O

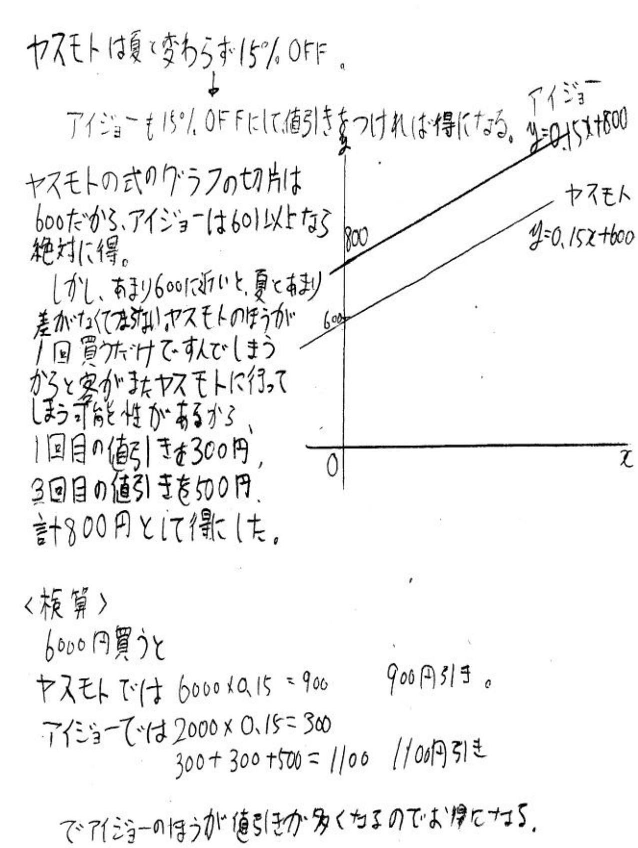


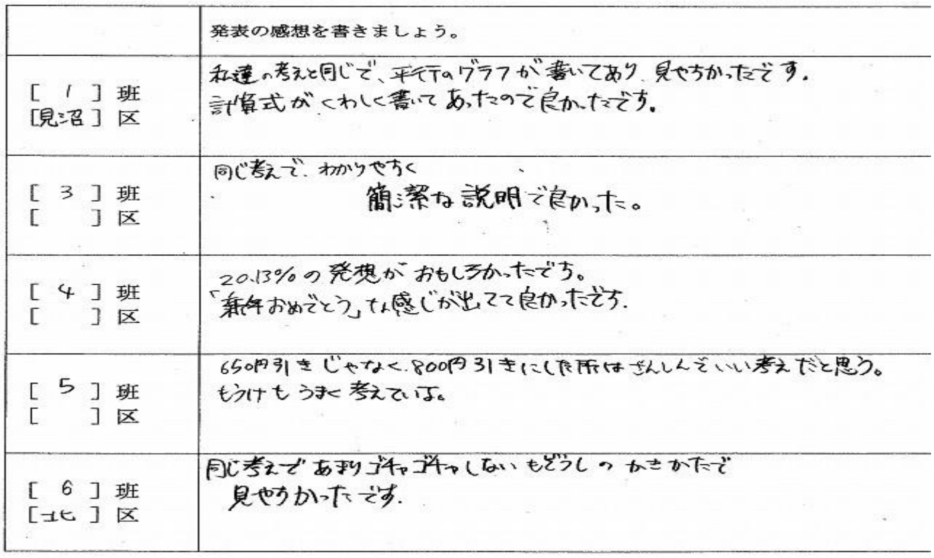
図 17　生徒 O.T

図 17 は，薬アイジョーの 1 回目を 300 円値引き，3 回目の値引きを 500 円，2 回目の値引きの割合を 15%に設定している。グラフの表現だけではなく検算として 6,000 円の場合の値引きの金額を記述している。

このように，C 選択支援として，C-1 シミュレーションを行い，A プロセス能力は A-3 数学的推論・分析と A-4 解釈・評価を，B 数学的内容は B-3 関数的な表現を使用している。

さらに，班ごとに新しい薬アイジョーの割引カードを作成させた。そして，各班で作成した薬アイジョーの新しい割引カードについてその特徴とそのよさが示されるように発表を行った。この発表では，A-4 解釈・評価，A-5 数学的コミュニケーション，B-3 関数的，C-1 シミュレーション，D-2 多様性・協調性，D-3 責任性・自立性に対応していると考える。

各班の発表については，図 18 に示したように各班の発表に対して感想を書くようにした。図 18 の感想例（2 班の生徒）では，1 班・3 班・6 班が同じ考え方であること，4 班に対しては図 16 に示されているように，割引率を 20.13%にした班に対する感想である。5 班に対しては図 17 に示されているように，割引率を 15%，1 回目と 3 回目の値引きの合計金額を 800 円に引き上げていることに対する感想である。

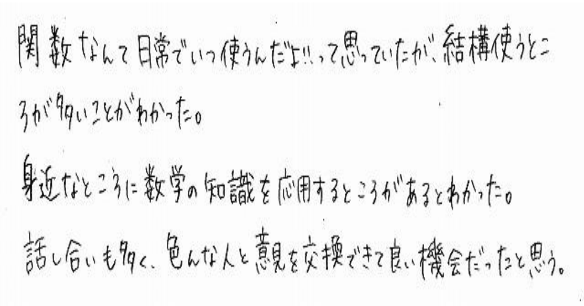


	発表の感想を書きましょう。
[1] 班 [見沼] 区	私達の考えと同じで、平行のグラフが書いてあり見やすかったです。計算式がくわしく書いてあったので良かったです。
[3] 班 [ ] 区	同じ考えで、わかりやすく 簡潔な説明で良かった。
[4] 班 [ ] 区	20.13%の発想がおもしろかったです。「新年おめでとう」な感じが出てて良かったです。
[5] 班 [ ] 区	650円引きじゃなく、800円引きにした所はざんしんでいい考えだと思う。もうけもうまく考えていた。
[6] 班 [ユヒ] 区	同じ考えであまりゴチャゴチャしないもどうしのかきかたで見やすかったです。

図 18　生徒 Y.M

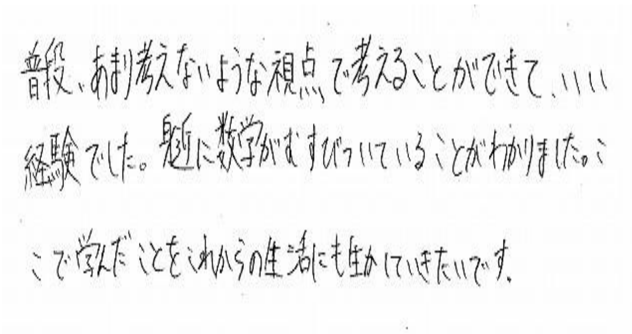
次に生徒の授業感想例を示す。

図 19・20 は，中学校で学んでいる数学が日常の生活と結びついていることについての記述である。



関数なんて日常でいつ使うんだよ!!って思っていたが、結構使うところが多いことがわかった。
身近なところに数学の知識を応用するところがあるとわかった。
話し合いも多く、色んな人と意見を交換できて良い機会だったと思う。

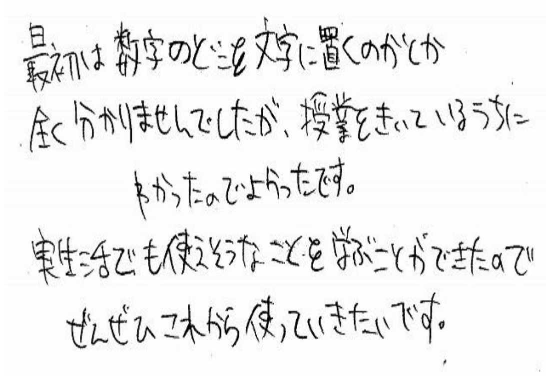
図 19　授業感想例 1



普段、あまり考えないような視点で考えることができて、いい経験でした。身近に数学がむすびついていることがわかりました。ここで学んだことをこれからの生活にも生かしていきたいです。

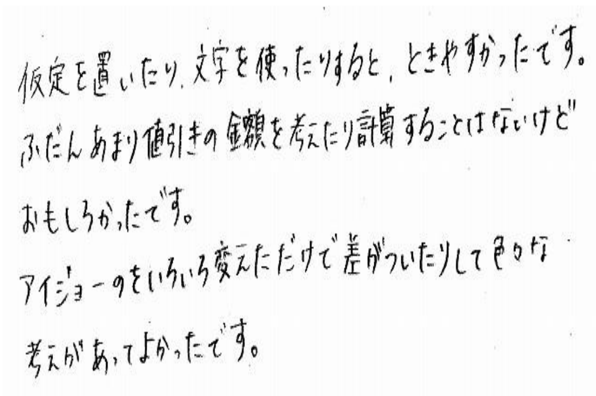
図 20　授業感想例 2

図 21，図 22，図 23，図 24 は，文字を使用することや仮定を設定することにより数学の問題につくり替えることの有効性について触れた記述である。



最初は数字のどこを文字に置くのかとか全く分かりませんでしたが、授業をきいているうちにわかったのでよかったです。
実生活でも使えそうなことを学ぶことができたのでぜんぜひこれから使っていきたいです。

図 21　授業感想例 3



仮定を置いたり、文字を使ったりすると、ときやすかったです。
ふだんあまり値引きの金額を考えたり計算することはないけどおもしろかったです。
アイジョーのをいろいろ変えただけで差がついたりして色々な考えがあってよかったです。

図 22　授業感想例 4

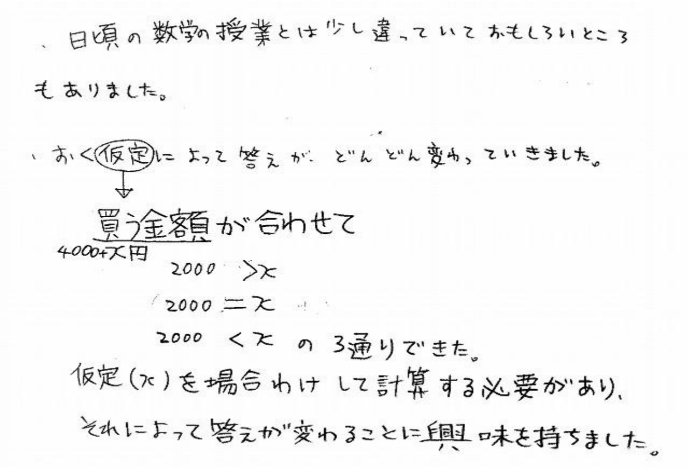

・日頃の数学の授業とは少し違っていておもしろいところ
もありました。
・おく仮定によって答えが、どんどん変わっていきました。
買う金額が合わせて
4000+x円
2000 > x
2000 = x
2000 < x の3通りできた。
仮定(x)を場合わけして計算する必要があり、
それによって答えが変わることに興味を持ちました。

図 23　授業感想例 4

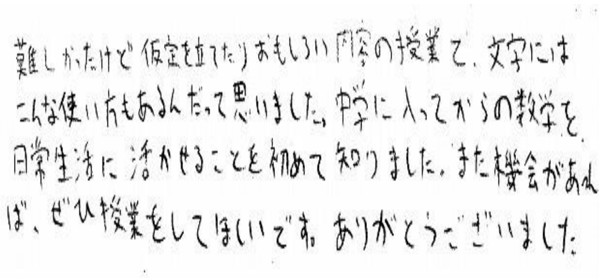

難しかったけど仮定を立てたりおもしろい内容の授業で、文字には
こんな使い方もあるんだって思いました。中学に入ってからの数学を
日常生活に活かせることを初めて知りました。また機会があれ
ば、ぜひ授業をしてほしいです。ありがとうございました

図 24　授業感想例 5

図 25 は，関係を明らかにする場合，グラフを活用することのよさについて記述している。図 26 は，課題 2 での新しい割引カードの割引率の決定について，社会的価値について触れた記述である。

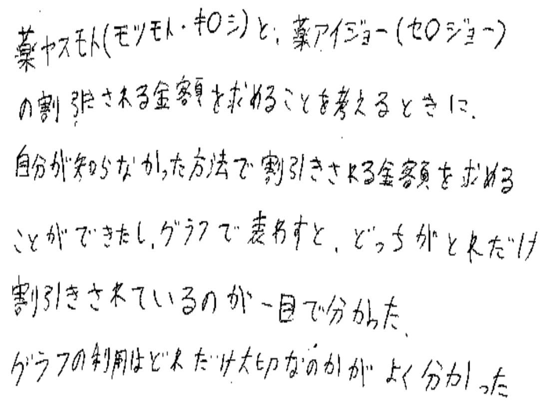

薬ヤスモト(モツモト・キロシ)と、薬アイジョー(セロジョー)
の割引される金額をもとめることを考えるときに、
自分が知らなかった方法で割引きされる金額をもとめる
ことができたし、グラフで表わすと、どっちがどれだけ
割引きされているのか一目で分かった。
グラフの利用はどれだけ大切なのかがよく分かった

図 25　授業感想例 5

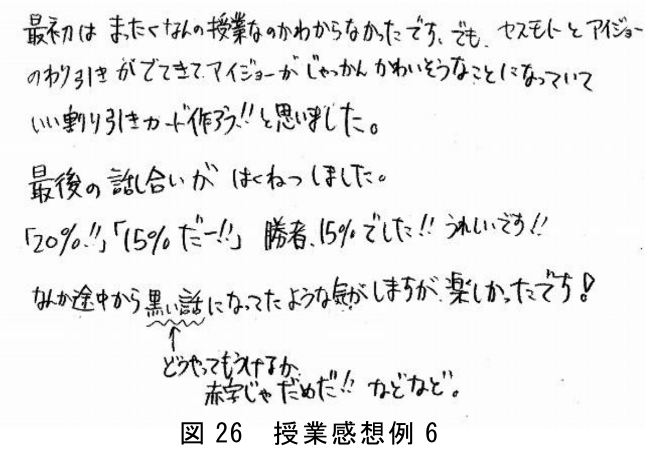

最初はまったくなんの授業なのかわからなかったです。でも、ヤスモトとアイジョー
の割り引きができてきてアイジョーがじゃっかんかわいそうなことになっていて
いい割り引きカード作ろう!!と思いました。
最後の話し合いがはくねつしました。
「20%!!」「15%だー!!」勝者、15%でした!! うれしいです!!
なんか途中から黒い話になったような気がしますが、楽しかったです!
どうやってもうけるか、赤字じゃだめだ!! などなど。

図 26　授業感想例 6

図 27 は，この授業は数学の授業ではあるが，授業内容に社会的価値観が含められているので，社会の授業，特に経済の授業のように感じたという感想が述べられている。図 28 は，この授業を通して数学の力をつける必要性について触れている。今までの数学の問題と違い，自分で使える数学を探してその数学を活用する力が試されている課題に取り組み，ただ与えられた数学の知識を使うのではなく，どのようにその知識を再構成して活用するのかについて述べられている。

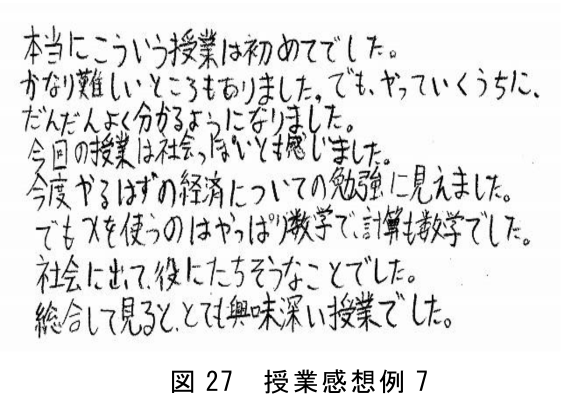

本当にこういう授業は初めてでした。
かなり難しいところもありました。でも、やっていくうちに、
だんだんよく分かるようになりました。
今回の授業は社会っぽいと感じました。
今度やるはずの経済についての勉強に見えました。
でもxを使うのはやっぱり数学で、計算も数学でした。
社会に出て、役にたちそうなことでした。
総合して見ると、とても興味深い授業でした。

図 27　授業感想例 7

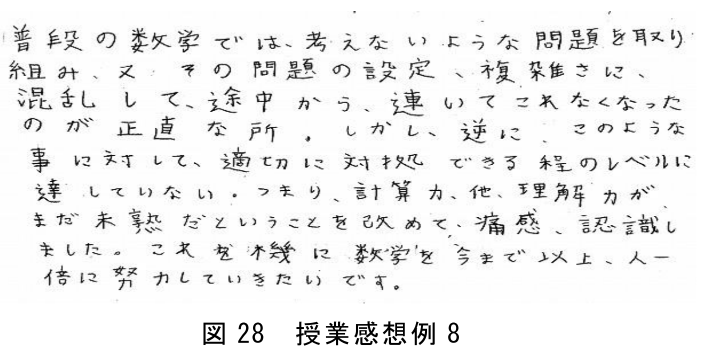

普段の数学では、考えないような問題を取り
組み、又その問題の設定、複雑さに、
混乱して、途中から、連いてこれなくなった
のが正直な所。しかし、逆に、このような
事に対して、適切に対処できる程のレベルに
達していない。つまり、計算力、他、理解力が
まだ未熟だということを改めて、痛感、認識し
ました。これを機に数学を今まで以上、人一
倍に努力していきたいです。

図 28　授業感想例 8

6.10.5　成果と課題

生活の中にあるドラッグストアの割引カードの優位性を考えるために，理想化・仮定の設定を行った。この定式化を行うことにより 2 つの割引カードの優位性を比較する数学的な問題として考えることができるようになった。これがプロセス能力の A-1 定式化になる。この問題を解決するために，使用した A-2 数学的表現は，式による比較より 2 つの割引カードの優位性を比較した生徒が見られた。これは数学的内容の B-1 代数的表現を使用したものである。さらに本授業では，数学的内容の B-3 関数的を用いることにより，選択支援の C-1 シミュレーションにつなげるようにした。関数的表現でグラフを使用したが，x 軸及び y 軸の値を問題に合うように設定することにより，自分で数学的推論・分析し，解釈・評価するなどシミュレーションのための根拠として活用することができた。ここで大切なことは，シミュレーションを行い終わりにするのではなく，そのシミュレーションの結果を活用して，さらに新しい結果を求めるようにしたことである。シミュレーションをすることが問題の目的ではなく，そのシミュレーションを活用する姿勢をもつことが数学を学ぶ意義につながるのではないだろうかと考える。

さらに，求めた新しい結果に対する評価が，社会的価値観になると考える。求めたものが数学の計算問題であれば，正しいか間違っているかという評価になるが，新しい薬アイジョーの割引カードの場合，どのような割引カードを作成してもよい。ここに数学的な価値をもたせるものが，プロセス能力の A-6 数学的・社会的価値認識になる。そこで，新しい薬アイジョーの割引カードのよさを社会的価値観ととらえた。それぞれの生徒が，ドラッグストアの店長として薬ヤスモトの割引カードに負けないよう薬アイジョー1 回目・3 回目の割引金額及び 2 回目の割引率の設定の変更を行った。

この新しい割引カードの作成にはグループ活動を行ったが，このグループのメンバーが薬アイジョーの各支店長という立場で参加しているとし,生徒の意識を高めるようにした。各グループの中では，支店長としてどのように消費者にアピールするかという話し合いが行われ，それが A-5 数学的コミュニケーションにつながったと考える。それは，図 14，図 15，図 16，図 17 の生徒の記述に表現されている。この記述には，社会的価値認識の D-2 多様性・多面性・協調性があると考える。また，その発表に対する生徒の考えが図 18 に示されているが，図 18 の生徒の記述に示されているように，支店長としての D-3 責任性・自立性も含まれていると考える。

課題としては，授業の中で 2 つの割引カードに対する立場が，課題 1 では消費者，課題 2 では割引カードの作成者というように異なっていることである。この立場の違いによる生徒の混乱は，生徒の授業中の様子や授業感想からは見られなかったが，現実世界の数学的な問題解決において判断力をはぐくむ場合，考慮していかなければならないと考える。

また，今回の授業では数学的判断プロセスにおいて関数的内容を活用して，シミュレーションを行い，社会的価値認識より数学的判断力をはぐくむようにした。しかし，図 9・図 10 の生徒のワークシートにあるように代数的な数学的内容から数学的判断力をはぐくむこともできると考える。次年度，もう一度授業を行うとしたら，数学的内容として，関数的内容及び代数的内容を活用することにより，さらなる数学的判断力をはぐくむことができるようにしたい。

注

1）この割引カードは，薬セイジョーにて発行された割引カードである。

2）この割引カードは，薬マツモトキヨシにて発行された割引カードである。

引用文献・参考文献

島田茂（1996),『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』，東洋館出版社．pp.9-21

長崎栄三（2001),『算数・数学と社会・文化のつながり』，明治図書

西村圭一・長崎栄三（2008),「数学教育における算数・数学と社会をつなげる力の意義と学習指導に関する研究」，日本数学教育学会誌第 90 巻第 9 号，pp.2-12

西村圭一・山口武志・久保良宏（2011),「数学的判断力の育成に関する研究－その意図と授業の枠組みとについて－」，日本数学教育学会第 44 回数学教育論文発表会論文集，pp.237-242

清野辰彦（2005),「数学的モデル化における「仮定の意識化」の役割」，日本数学教育学会誌第 87 巻第 7 号，pp.2-12

6.11　「ポカリウスを分配しよう」と「走り幅跳びの代表選手を選ぼう」

筑波大学附属坂戸高等学校　小澤　真尚
文部科学省　　長尾　篤志

概　要

第 4 章に示した数学的判断力に関する調査で用いた問題を一部修正し，高校生に対して授業を行った。生徒は学習感想において，本授業で学んだこととして，着眼点や考え方が人によって異なること，問題の解決には他者の考え方にも耳を傾けること，柔軟に考えることなどを挙げ，他者の意見を参考にし，数学的な根拠を挙げて考えることが自分自身の考えを決定づける重要な方法であることを理解したことがわかった。

6.11.1　教材について

問題１

とおるさんの学校は，スポーツ飲料「ポカリウス」の粉末を 600 袋もらいました。これを夏休みに活動するクラブに分けることにしました。夏休みに活動するクラブの人数と活動日数は，下の表の通りです。

クラブ名	人数	活動日数
バスケットボール	20	14
サッカー	50	12
テニス	30	18

クラブ名	人数	活動日数
バドミントン	15	8
合唱	25	24
理科	10	24

あなたなら，それぞれのクラブに何袋ずつ分けますか。理由も説明してください。

問題２

学校対抗の陸上大会があります。担当のみゆき先生は，「走り幅跳び」の選手 1 名を誰にするか悩んでいます。

「走り幅跳び」は，1 人が 3 回跳び，その中で最も遠くまで跳んだ人が優勝となります。昨年までの 2 年間の優勝記録は，次の通りです。

年	2010 年	2011 年
優勝記録	403cm	385cm

みゆき先生は選手を選ぶために，下の表の昨日と今日の記録を見ています。×の印は，ファール（記録なし）を示しています。

あなたなら，「かずお」，「やすゆき」，「たかし」のうちの誰を選手にしますか。理由も説明してください。

「走り幅跳び」の記録

昨日	１回目	２回目	３回目	４回目	５回目
かずお	355cm	345cm	385cm	360cm	370cm
やすゆき	×	375cm	353cm	390cm	365cm
たかし	400cm	×	315cm	402cm	×

今日	１回目	２回目	３回目	４回目	５回目
かずお	×	369cm	372cm	375cm	386cm
やすゆき	376cm	×	357cm	386cm	374cm
たかし	×	×	×	320cm	405cm

問題１，２とも，第４章で述べた数学的判断力に関する実態調査で用いた問題（名前のみ変更）である。問題の詳細については，第４章を参照されたい。

6.11.2　数学的判断力に関する枠組みとの関連

問題１

Ａ：プロセス能力
　A-1：定式化
　A-5：数学的コミュニケーション　A-6：数学的・社会的価値認識
Ｂ：数学の内容
　B-1：代数的
Ｃ：選択支援
　C-2：指標・指数
　C-3：評価式
Ｄ：社会的価値観
　D-1：公平性・公正性・平等性
　D-3：責任性・自律性

問題２

Ａ：プロセス能力
　A-1：定式化
　A-3：数学的推論・分析　A-4：解釈・評価
　A-5：数学的コミュニケーション　A-6：数学的・社会的価値認識
Ｂ：数学の内容
　B-1：代数的

	B-4：統計的
C：選択支援	
	C-2：指標・指数
C-3：評価式	C-4：確率・統計的推測
D：社会的価値観	
D-3：責任性・自律性	D-4：持続性・恒常性・一般性
D-5：効率性・有限性	

6.11.3　授業の実際

日　　時：平成 24 年 12 月 17 日（月）第 1 校時（問題１），第２校時（問題２）

授 業 者：筑波大学附属坂戸高等学校　小澤　真尚　教諭

対象生徒：筑波大学附属坂戸高等学校　第三学年　２２名

数学に対する興味・関心はあり，取り組む姿勢にも積極性は見られるが，「数学Ｉ」しか履修していない生徒もいるため，履修歴にはバラつきがある。また，履修科目の少ない生徒の中には数学に苦手意識を持っている生徒もいる。また，プロセス能力に関しては，おおむね，水準 1（自己限定的）または水準 2（多様性の萌芽）にあると考えられる。これらが水準 3（社会的）に上がることを目標とする。他者との相互作用においても，より高い水準（$\alpha \to \beta \to \gamma$）を目標とする。

第 1 時の授業展開の概要：

［50 分授業］

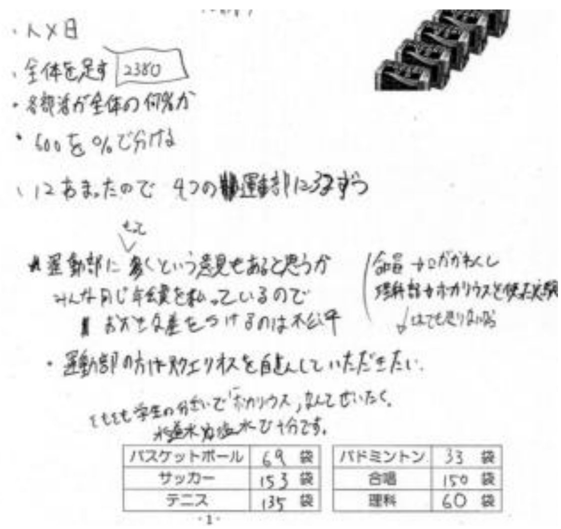
0～5 分　**導入**：本時で扱う問題は答えは一つではなく，それぞれの経験を生かしてそれぞれに考えてほしいということを伝えた。問題 1 を提示し，個別に考えても，友だちと相談してもよいことにした。

5～35 分　**解決**：ほとんどの生徒が２～３人で考えた。途中，「一袋にはどのくらい粉が入っているのか」という質問があった。これは，自分たちで仮説を立てるようにと回答した。

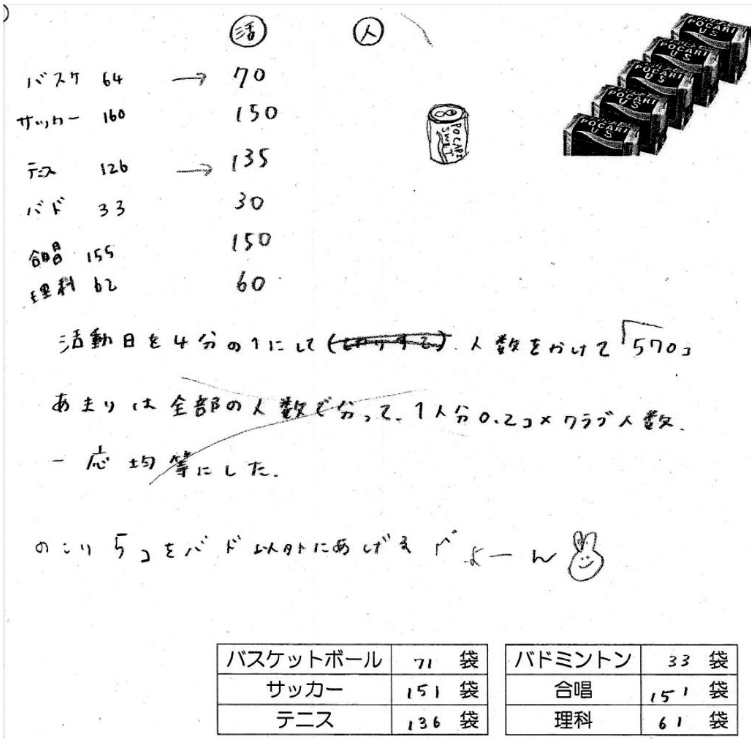
35～45 分　**発表**：指名し，各部へ何袋ずつ割り当てたかと考え方を発表させた。

$\boxed{\text{S1}}$　(人数)×(活動日)の値を求め，それが全体の合計の何％になるかを考える。

「みんな同じ額の生徒会費を払っているので，不公平のないようになるべく均等に。」

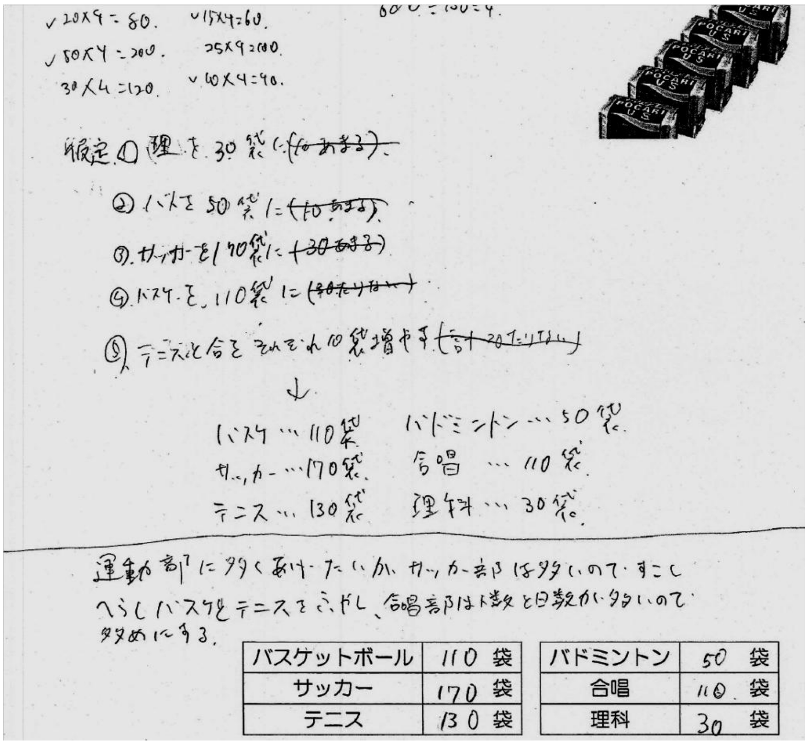


$\boxed{\text{S2}}$　活動日を 1/4 にして人数をかけると 595 個が配れて，残りは活動日の少ないバドミントン部以外にあげる。



バスケットボール	71 袋	バドミントン	33 袋
サッカー	151 袋	合唱	151 袋
テニス	136 袋	理科	61 袋

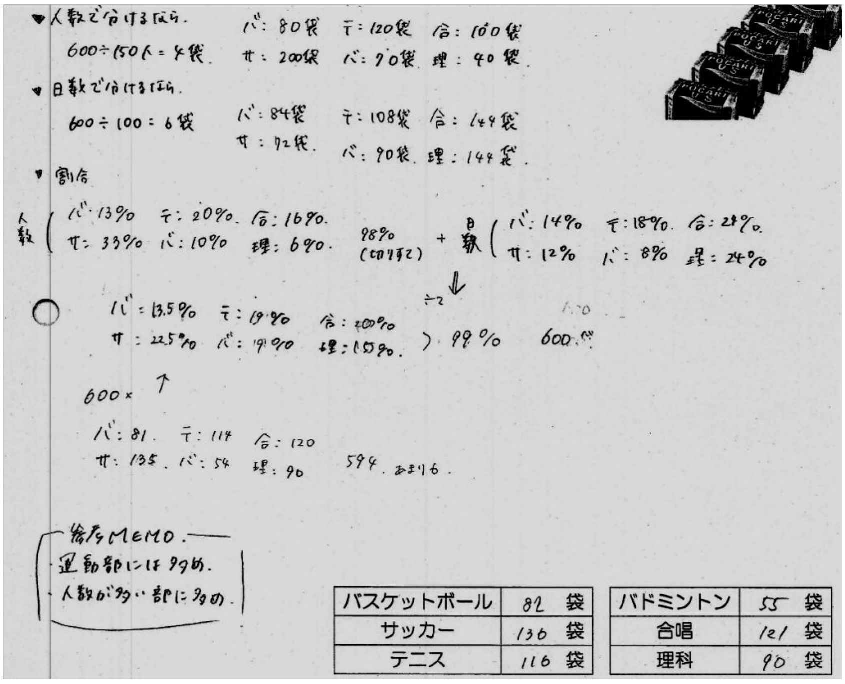
$\boxed{\text{S3}}$　600 を全体の人数で割って，一人あたりの袋数を求め，(人数)×(一人あたりの袋数)を求めた上で，現実場面に即して解釈し直して調節をする。



バスケットボール	110 袋	バドミントン	50 袋
サッカー	170 袋	合唱	110 袋
テニス	130 袋	理科	30 袋

「理科部には 40 袋もいらないし，中で活動するとか外で活動するとかは置いておいて，運動部にはたくさんあげたいので，・・・サッカー部とテニス部はよく動くので，・・・サッカー部を 200 にするとさすがに多すぎるのでは・・・と考えて，バランスをとっていった。」

$\boxed{\text{S4}}$　人数，活動日数のそれぞれの割合の「平均」を出し，その比で分配する。


▼人数で分けるなら．
600÷150人＝4袋．　バ：80袋　テ：120袋　合：160袋　サ：200袋　バ：70袋．理：40袋．
▼日数で分けるなら．
600÷100＝6袋　バ：84袋　テ：108袋　合：144袋　サ：72袋．　バ：90袋．理：144袋．
▼割合
人数（バ：13％　テ：20％．合：16％．サ：33％　バ：10％　理：6％．　98％（切りすて）＋日数（バ：14％　テ：18％．合：24％．サ：12％　バ：8％　理：24％
÷2
バ：13.5％　テ：19％　合：20％　サ：22.5％　バ：9％　理：15％．　99％　600
600×
バ：81．テ：114　合：120　サ：135．バ：54　理：90　594．あまり6．
参考MEMO．
・運動部には多め．
・人数が多い部に多め．

バスケットボール	82　袋		バドミントン	55　袋
サッカー	136　袋		合唱	121　袋
テニス	116　袋		理科	90　袋

「運動部だとかの条件は考えないで，計算して出た数をそのまま使って答えにした。」

45～50 分　まとめ：分けるときには何らかの理由があるはずであり，「こうだからこう分けた」と言えることが大切であることを伝えた。

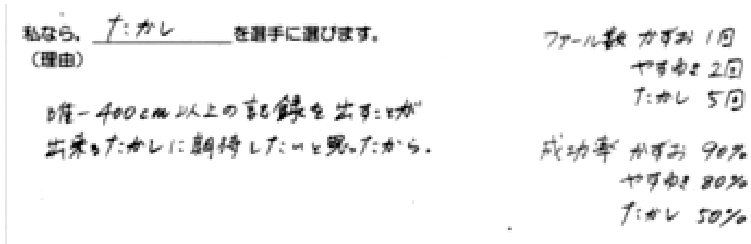
第2時の授業展開の概要：

［50 分授業］

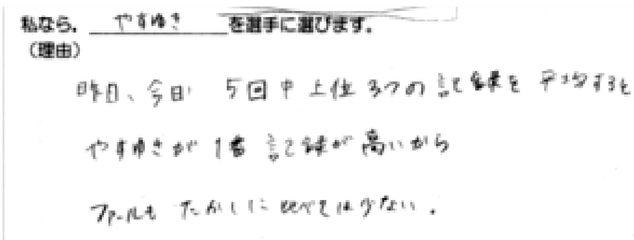
0～5 分　**導入**：前時の問題と見た目は異なるが，同様に考えとその理由を書いてもらう問題であることを伝え，問題 2 を提示した。大会では 3 回跳べること等を確認した。

5～25 分　**解決**：ほとんどの生徒が 2 ～ 3 人で考えた。平均を求めた後，ファウルに着目し，選手の精神面を想像し，どの選手にするとよいかを考えた生徒が多かった。最終的に，どの選手にするかを決める段階で，かなり悩んでいた。

S5　「優勝記録を超えている回数が最も多いから。」
「特に，唯一 400 を超えているから。」



S6　「昨日と今日のそれぞれ上位 3 つの記録の平均を求めた。」



S7　「4 回目，5 回目は差が大きいので集中して跳んでいない。だから，1～3 回目のみに注目した。それで，1～3 回目の（最長と最短）記録の差を点数化して，その差が小さい『かずお』にするとよいと考えた。」
「『かずお』はファウルが 1 回しかなく，記録が最終的に上がっている。本番でも，冷静に跳べる。（野球部での実体験を述べ）スポーツでは練習で普通の人が本番でも安定する。」

「走り幅跳び」の記録

昨日	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
かずお	355cm	345cm	385cm	360cm	370cm
やすゆき	×	375cm	353cm	390cm	365cm
たかし	400cm	×	315cm	402cm	×

今日	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
かずお	×	369cm	372cm	375cm	386cm
やすゆき	376cm	×	357cm	386cm	374cm
たかし	×	×	×	320cm	405cm

私なら、かずお を選手に選びます。
（理由）
・1回目→2回目→3回目の全ての記録の差を出して、全て点数にする。（ファール(は)入れない）
・3回目までの記録をくらべて考える
・4回目からは大会のルールの回数をこえているので、あまり、評価の対象としない。

→「でも，優勝させたいんだから，優勝記録を超えた『たかし』の方がいいでしょ。」

S8 「大会が３回跳べるから，1～3，2～4，3～5 回の平均を出し，それを合計してさらに平均を出して考えた。」「ファウルは０とした。」

「走り幅跳び」の記録

昨日	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
かずお	355cm	345cm	385cm	360cm	370cm
やすゆき	×	375cm	353cm	390cm	365cm
たかし	400cm	×	315cm	402cm	×

今日	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
かずお	×	369cm	372cm	375cm	386cm
やすゆき	376cm	×	357cm	386cm	374cm
たかし	×	×	×	320cm	405cm

私なら、かずお を選手に選びます。
（理由）
①1～3回、②2～4回、③3～5回の平均を出す。
その①②③をたしてまた平均を出したところ、一番かずおの記録が良かったから。

35～50分 まとめ：プリントを配布し，次のまとめ１・２を書かせた。

【まとめ１】問題１，問題２の解決を通して，あなたはどのようなことを学びましたか。また，どのような考え方が今後も使えると思いましたか。

【まとめ２】問題１，問題２に挑戦した感想を書いてください。

その後，身の回りにこのような状況はないかを考えさせ，身近で何かを決めるときに理由（根拠）にもとづいていることを実感させた。

6.11.4 授業の考察

ここでは，第２時の最後に記述させた，「まとめ１」「まとめ２」について分析する。

（１）「学んだこと」

22 名の生徒の記述のうち「学んだこと」を整理しなおしたものが次の表である。

	「学んだこと」	人　数
1	同じ結論でも導く過程が多様だ	2
2	人それぞれ，いろいろな考え方がある（のは面白い）。人間性が現れる	7
3	自分の経験によって考え方が変わる	1
4	答えが一つではない問題に自分なりの答えを出す	1
5	考え方で答えが変わるのでいろいろ試してみることが大切だ	4
6	他の人の意見を聞いて考えを進めていくのはこれからも生かせる。人の考えは参考になる。今後，活用できそうなものがたくさんあった。一人では分らなくても考えていくことが大切だ	6
7	百分率を用いるのはいいことだ。人を説得しやすい	2
8	平均の考えを用いて考えることが多い。平均などを用いると人を説得できる	3
9	数学的な考え方や計算は日常生活で使える。計算で出た答えは自分の考えを裏付ける	2
10	問題２で，３回ずつに分けて考えることは自分にはない発想だ	3
11	問題の背景を考えてどのような方法をとるかを考えることが大切	1
12	数値的な記録だけでなく，その他の情報も考慮する	2
13	問題文に書かれていないことを勝手に想像して利用しようとするのはよくない	1

学んだことは大きく次の４つに分けられる。

① 答えが一つに定まらない問題では，人はいろいろな考え方をする。どのような考え方をするかで結果は変わってくるが，考え方に影響を与えるものとして生活経験などがある。

② 問題の背景を考えてどのような方法をとるかを考えることが大切だ。方法は柔軟に変えていくことも必要だ。

③ 人の意見は参考になる。一人では分らなくても考えを進め，人の意見も適宜参考にすればよい。

④ 百分率や平均など，数学の考えを用いると人を説得することができる。

実際的な問題を解決しようとすると様々な条件を考えなければならないが，本質的なものは何かを見いだすことがカギになる。例えば，問題２で「実際の試合では３回連続して競技を行うのだから３回連続した記録を考える方がよい」，とか「実際の試合では３回しか競技ができないのだから，１回目や２回目でファウルになり４回目や５回目でよい記録を出す選手は実力が発揮できないはずだ」という発想はこの問題の本質を突いているとも

言える。いろいろ意見を出す中でそのことを感じ取った生徒は少なくない。また，人を説得する際に数学を用いることが有益だ，ということも生徒は感じ取っている。数学が問題解決に際し，不要な恣意を排し，そのルールに従えばだれもが同じ結論に達し，自他を納得させるに有効であるということを感じ取らせるのに今回の授業は成功していると言えよう。

（2）「感想」

22 名の生徒の記述のうち「感想」を整理しなおしたものが次の表である。

	「感　想」	人　数
1	答えが一つに決まらないということで新鮮さを感じた。最後まで面白く考えることができた	4
2	「そういう見方もあるのか」という発見もあり，ためになる授業だった	2
3	適当に解決することもできたが，よく考えると「これだ」と決めることができ面白かった	4
4	答えが一つに決まらず数学的でなかった	1
5	自分なりの答えを出すのに難しさを感じた	2
6	問題に書かれていないことを指摘されたり，他の人の意見に納得させられたりした	1
7	いろいろな考えを自力・協力して考え，学ぶことができ楽しかった。今後，実際に問題のような場面があればよい	1
8	答えが一つに決まらない問題で，他の人の意見を取り入れたりすり合わせたりして納得した答えが得られるのだろうと思った	2
9	周りの人を納得させるような説明ができるとうれしかった	1
10	自分の考えをもっと押せるとよかった	1
11	他の人の意見をたくさん聞いて，結局自分もたくさん考えることができた。 他の人の意見を聞いて驚くこともあったが，これから数学を学ぶ上で参考になる	3
12	数学的なことも，自分の生活に置き換えて考えると分りやすくなる	1
13	普段扱う数学の問題は，いろいろな条件が付いているが，自分で条件を考えなければならない問題は難しいと感じた。指標が多すぎても少なすぎてもうまく解決できない	3
14	決められた式に当てはめるのではなく，自分の理論を作り使うことができるので考え甲斐があった	1
15	解決するとスッキリするが，解決できないとモヤモヤする。もう一度考えたい	1

感想は大きく次の５つに分けられるだろう。

① 答えが一つに決まらなかったのでいろいろ考えられ面白かった。／答えが一つに決まらなかったので難しかった。
② 条件などを自分で考えることができたので深く考えることができた／条件などを自分で考えなければいけなかったので難しかった。
③ 他の人の意見が大変ためになった。／他の人の意見を基に深く考えることができた。
④ 自分の考えを説明して他の人を納得させることができた。／自分の考えをきちんと説明できなかった。
⑤ 数学を学ぶ上で大いに参考になった。

生徒の印象は，全体的にかなりよい。「難しかった」という生徒も，難しいから嫌だというのではなく，むしろ難しいことを喜んでいると感じる。いくつかの理由はあるだろうが，自分で自由に考えを進められることや，みんなで問題を解決すること（数学をつくりあげること）が大きな理由ではないか。今後，問題解決型の授業を進めることや，一人一人の生徒の考えを生かすこと，その中で納得しながら他の生徒の意見を取り入れよりよい考えへと発展させることを通常の数学の授業でも考えていくことが大切ではないか。

6.11.5　成果と課題

対象の生徒は自由選択科目「数学基礎」の受講者で，日頃の授業から考えることに重点を置かせてきた。その影響もあったのか，授業者の想定よりも話し合い，じっくりと取り組んでいた。しかし，今回のような他者と結論が異なったり，あるいは結論が同じでもその根拠が大きく異なったりする課題は，この科目で（おそらく数学の他の科目でも）扱ってはこなかったため，生徒には戸惑いもあったように感じた。

前述の生徒の感想や学んだことからも，他者の意見を参考にし，数学的な根拠を挙げて考えることが自分自身の考えを決定づける重要な方法であることを今回の題材から生徒たちは理解していると判断できる。生徒の反応からも，自分の考えをまとめ，他者に伝える活動のために今回の題材は効果的であったと考えられる。

今後の課題としては，今回のような生徒同士で複数の結論が存在するような問題解決型の良質な課題を，生徒の実態に合わせてどのように選択・準備していくか，また，これらの課題を通して授業者が生徒のどのような行動や発言を取り上げ，評価していくかが挙げられる。実際に授業を行い，問題の選択や評価の難しさを感じた。

6.12　本章のまとめ－授業実践における「現実世界の問題」の取扱い

6.12.1　数学的判断力の枠組みにおける「現実世界の問題」の位置

第２章では，「数学的判断力に関する枠組み」と「数学的判断プロセス」の相互関係が示されている（図 2-1)。ここでは，その中の「現実世界の問題」に注目してみていく。まず，「数学的判断力に関する枠組み」における「現実世界の問題」の位置づけをみていく。「A．プロセス能力」では，「現実世界の問題」は，直接的に，「A-1　定式化」及び「A-4　解釈・評価」が関係している。それぞれの定義は，「A-1　定式化」が「現実世界の問題を『数学の問題』に翻訳する（直す）能力」，「A-4　解釈・評価」が「もとの現実世界の問題に照らし合わせて，判断過程や判断方法，判断結果を解釈し，それらの妥当性を評価する能力」となっている。「B．数学の内容」では，「現実世界の問題」を定式化する際に，用いられる数学が焦点化される。「C．選択支援」では，「現実世界の問題」は，数学的解決の対象となっている。「D．社会的価値観」では，「現実世界の問題」の解決への根拠となる諸点が見出されている。次に，「数学的判断プロセス」における「現実世界の問題」の位置づけをみていく。数学的判断プロセスでは，「現実世界の問題」から「数学の問題」への定式化が前提となっている点に注意したい。数学的判断プロセスの規定において参照している，数学的モデル化過程では，「現実世界の問題（場面)」は，必ずしも，問題解決のはじまりではない。数学的判断プロセスにおける「現実世界の問題」の位置づけは，問題解決のはじまりであると同時に，数学的判断の対象でもある。それは，当初の「現実世界の問題」に対して，一定の判断を行う一連のプロセスとして数学的判断プロセスが規定されているためである。本科研で規定している「現実世界の問題」は，数学的判断の全般に関係している。

文脈依存的である数学的判断プロセスの実態を捉える上で，各授業実践における「現実世界の問題」の取扱いを確認し，また，その実際を検討することは，本科研の意義を実証することにもつながる。そこで，各授業実践における「現実世界の問題」の取扱いに注目する。「数学的判断力に関する枠組み」における「現実世界の問題」の取扱いの実際を捉えるため，「A．プロセス能力」については，「A-1　定式化」及び「A-4　解釈・評価」に焦点をあてる。「B．数学の内容」及び「C．選択支援」については，児童・生徒が用いた数学が，「現実世界の問題」の解決にどのように適用されているのかに注目する。「D．社会的価値観」については，児童・生徒の根拠が「現実世界の問題」に対する判断にどのような影響を及ぼしているのか，検討する。そして，「数学的判断プロセス」における「現実世界の問題」の取扱いの実際を捉えるため，主として，前提となる定式化の段階に注目する。6.12.2「各授業実践における「現実世界の問題」の取扱い」では，「授業展開の概要」に沿って，これらの「現実世界の問題」の取扱いの実際についてみていく。各授業は，そのねらいに応じて計画され，本科研会合等において見直しが行われ，実践が行われたものである。そこで，数学的判断力の観点から，授業者による工夫がみられた点や特徴的な児童・生徒の回答にも注目する。

6.12.2 各授業実践における「現実世界の問題」の取扱い

（1）伝統技術展への行き方を考えよう

「1．問題の把握とプランの作成」の段階では，「現実世界の問題」の解決に関係する条件整理が行われている。「A．プロセス能力」のうち，「A-1 定式化」に関係する活動が展開されている。例 2（1 つのルートで全員が行く）及び例 3（複数のルートを組み合わせる）の児童らの回答は，自己内「水準 2」に相当する。それは，個別解決の際，児童らは，自分なりの視点を設定し，その視点から数学的解決を目指しているからである。

「2．時刻を考慮したプランの作成」の段階では，「バスの時刻表」を考慮に入れた解決へと，検討する条件に制約をつけている。「時間」という変数による定式化により，「現実世界の問題」から「数学の問題」への翻訳がより一層期待できる。ここで注意したいのは，必ずしも，「数学の問題」へと定式化された訳ではない点である。例えば，「バス・バスだと，かかる時間が長いので，バスと徒歩がいい。」という発言は，「数学の問題」へと定式化する上で，児童自身が考慮すべき事柄として挙げたものである。ここで，「A-4 解釈・評価」については，例 2 から例 3 への変更は，自己内「水準 3」に相当する。それは，時刻を考慮した個別解決の際，児童自身の判断結果にもとづき，より妥当性を高めるための修正を行っているからである。ここまでは，あくまでも個別解決であり，グループでの話し合いや提案書の作成により，更なる数学的判断が要求されることは言うまでもない。

「3．プランの評価と修正」の段階では，「数学の問題」や「選択肢」から，「現実世界の問題」へのフィードバックが行われる。ここでの授業者の評価は，プランの売りを十分に説明出来なかったとされている。「A．プロセス能力」のうち「A-4 解釈・評価」については，「他者との相互作用」により，水準の向上が認められなかったことになるが，児童自身が修正もしくは主張したいプランを検討する際，自己内「水準 2」に相当している場合もあり得る。個々のプランの詳細を追っていく必要がある。

「4．発表と評価」の段階では，「3．プランの評価と修正」の段階における話し合いを踏まえて，児童自身が提案するプランにキャッチフレーズをつける。ここでは，「現実世界の問題」に対する判断が行われる。児童が提案した「他のお客さんに迷惑をかけないプラン」といったキャッチフレーズからは，「D．社会的価値観」のうち「D-3 責任性・自律性」にもとづく判断とみることができる。

児童に提示される当初の「現実世界の問題」は，実際に児童自身の経験を活かした解決を想定している。「1．問題の把握とプランの作成」の段階では，「先生たちの考えは？」という声があがっていた。学校行事の 1 つであるから，児童自身が責任をもって問題解決に取り組むため，必要最低限な情報や条件を把握しておきたいという，積極的な姿勢がみられる。このような「D．社会的価値観」の表出を，本授業実践のように，指導者が受容していくことが必要である。「数学の問題」への定式化の際，授業者の判断により，「人数」「時間」「時刻」の 3 点を児童が考慮することは困難であるとして，「2．時刻を考慮したプランの作成」の段階で，「バスの時刻表」を提示するという工夫がみられた。当初の「現実世界の問題」を解決する際，板書の記載にもある＜知りたいこと＞の 1 つに「のりもの」があり，児童らは「時刻」を自然な形で想起されるであろう。しかし，定式化を前提とする数学的判断では，少なからず制約をつけて「数学の問題」へと定式化を行うことも必要

である。

（２）的当て

「導入」の段階では，前時の残り 10 分を利用して取り組んだ，的当ての問題解決の振り返りが行われた。本時の学習前に，指導者が事前に児童の回答を把握することが出来るようにした点に指導上の工夫がみられる。ここでの「現実世界の問題」は，文化祭で的当てを実施したときに実際に起きたことを踏まえて教材化したものである。本教材では，次の 2 点で，「Ｄ．社会的価値観」の創出をねらいとしている。1 点目は，的に投げた玉の 1 つが線上にあり，その点数をどのように考慮するのかという点である。2 点目は，学習対象である 4 年生がクラスのイベントとして的当てを行い，1 年生の児童が投げた場合を想定している点である。

「発表」の段階では，事前連絡をしておいた児童による発表が行われた。指導者が，「発表者は，数学的モデルとその背景にある社会的価値観を述べて自分の考えを他者に伝えようとしていた。」と述べているように，指導上の工夫が功を奏したと言える。また，「児童の中には，『僕の考えは，A さんの考えに似ているんですが･･･，でもこういう点で違っている考えです。』というように，友だちの考えと比較しながら発表する子どもも見られた。」と述べているように，「他者との相互作用」を意識した発表を心がけている点も注目に値する。児童 C1 は「1 年生がせっかく来てくれたから，点数の高い方を得点とする。」として，定式化を行っている。ここでは，「A-1　定式化」について自己内「水準 2」の活動とみることができる。それは，自分なりの視点を設定し，その視点にもとづく数学的解決を行っているからである。児童 C3 は「低学年なら高い方，中学年ならその間，高学年なら低い方を得点とする。」として，定式化を行っている。ここでは，「A-1　定式化」について自己内「水準 3」の活動とみることができる。それは，多様な視点を設定し，それぞれの視点にもとづく数学的解決を行っているからである。同様の視点は，児童 C7 や児童 C8 の解答にも確認することが出来る。児童 C3 の解答に対して，「T　式から見ても C1 のと同じだということがわかります」と述べているけれども，上述のように，「A-1　定式化」の自己内水準については違いが見られる。

「まとめ」の段階では，発表した児童の色々な考えの中から，自分が選択したいものを選ぶことになる。ここでは，「Ｄ．社会的価値観」のうち「D-1　公平性・公正性・平等性」の観点から，自身の考えを捉え直すことが必要となる。また，指導者は，数学的判断力に関する枠組みの中では取り上げていないけれども，的当てというゲームを題材としているため，児童は「D-6　快楽性・愉悦性」についても考慮するかも知れない。

（３）走り幅跳びの代表選手を選ぼう

選定にあたり，日頃の体育科での学習や「連合運動会」と関連づけている。このように，児童自身が「現実世界の問題」として捉えやすくなるような指導の工夫がみられる。

「個別解決」の段階では， 児童それぞれが「Ｂ．数学の内容」を選択し，「Ｃ．選択支援」を設定している。例えば，例 1（記録の合計を求め，5 回の平均を出した児童）では，平均を求めるという「B-1　代数的」手法を用いて，数学的解決が行われている。一方，例 3（失敗する確率を考えた児童）では，「B-4　統計的」手法を用いて，「C-4　確率的・統計的推測」による数学的解決が行われている。このとき，「A-1　定式化」で言えば，自

己内「水準 2」に相当する。そして，「A-4　解釈・評価」で言えば，自己内「水準 1」となる。それは，児童らは，自分なりの視点を設定し，その視点から数学的解決を行っているからである。授業者が「ある方法で算出した結論に応じて選手を選んだだけの児童も多く」と指摘しているように，自分なりの視点をもつことが出来ても，複数の視点の導出は困難であるかも知れない。「A-1　定式化」の自己内「水準 3」に示されている，多様な視点を設定して数学的判断を行うためには，次の段階にあるような「他者との相互作用」が必要となる。

「小グループでの話し合い」の段階では，まず，同種の考えを持っている児童同士が集まり，話し合いを行っている。ここでは，「A-4　解釈・評価」について，「他者との相互作用」を通じて，自己内「水準 3」への向上が期待できる。同じ選手を選んだとはいえ，必ずしも，同じ支援ツールによる数学的解決とは限らない。このとき，「A-1　定式化」についても，同様に，「他者との相互作用」による水準の向上が期待できる。

「学級全体」の段階では，選んだ選手の異なる他のグループの意見を参考としながら，話し合いを行っている。このとき，「A-1　定式化」及び「A-4　解釈・評価」については，「他者との相互作用」を通じて，自己内水準の向上が期待されている。

ここで，「数学的判断力に関する枠組み」については，「D．社会的価値観」に注目する。

走り幅跳びの試技は 3 回であるというルールを意識した児童は，ルールという「現実世界の問題」を考慮しながら，「数学の問題」への定式化を行い，ファールをせずに記録を残すことができる選手を代表にしている（6.4.4 の図 1）。これは，「D-4　持続性・恒常性・一般性」といった，「D．社会的価値観」にもとづく判断である。また，選ばれた選手について，授業後の感想の 1 つに「C の選手を代表にしたら，記録会で失敗したらかわいそう」という記述がある。つまり，走り幅跳びの代表選手として好記録が期待できる反面，ファールにより記録なしで終ってしまう危険性を孕んでいる点を考慮している。これは，「D-3　責任性・自律性」が表出している。「現実世界の問題」に対する判断として，数学的判断を通じた結果であっても，それとは相反する「D．社会的価値観」にもとづく判断が行われる可能性があることを指摘している。

「現実世界の問題」の設定にあたり，「記録が良い」ことと「失敗が少ない」ことが両立し得ない条件設定をしている点に工夫がみられる。つまり，例 4（複数の条件を考慮して選択しようとした児童）や「ファールの回数をどのように考慮するのか」といった，「C．選択支援」のうち「C-2　指標・指数」を児童自身が設定して数学的判断を行うような教材として工夫がみられる。

（4）自動販売機の設置場所を考えよう

「導入」の段階では，デジタル統計教材の 1 つであるソフト『まなぼう統計』に所収されている大江戸地区という架空の町の自動販売機についてのデータをもとに，児童らの通学地域である実際の汐入地区に児童販売機を設置するという「現実世界の問題」を設定した点に工夫がみられる。『まなぼう統計』では，架空の大江戸地区のデータを参考にしながら，架空のむさし地区における自動販売機設置を考える問題であるため，より児童らにとって現実味のある「現実世界の問題」として捉えられたと言える。児童らの回答として，「自分の家の近くがいい」「遊び場所に近いから」といった，児童自身の生活経験にもとづ

く直感的判断が行われている。また，授業者が「売り上げが多くなるか」という発言を行ったことで，自動販売機の設置会社の視点から自動販売機の設置に主題変更ができた。このように,「現実世界の問題」から「数学の問題」へと定式化を促す発言の工夫がみられる。

「個別解決」の段階では,「現実世界の問題」に対して，児童それぞれの判断が行われている点に特徴がある。また，実際の汐入地区における児童販売機の設置を目的としていることから，収集済の汐入地区の通行量のデータを用いている点にも工夫がみられる。例 1（生活経験から結論を導き出そうとした児童のノート）にあるように,「数学の問題」への定式化を行わずに判断を行っている。例 2（データから割合を求めて考えようとしている児童のノート）にあるように，割合という「B-1　代数的」手法を用いて,「数学の問題」への定式化を行って数学的判断を行っている。

「小グループでの話し合い」の段階では,「他者との相互作用」を通じて,「数学の問題」から「選択肢」の導出が行われている。例示されている 3 つのグループの話し合い結果にあるように，同じ割合という「B-1　代数的」手法を用いて,「数学の問題」として解決している。児童の意見として,「同じ考え方（割合を使って求める）をしているのに，結果が全然違って驚いた」とあるように,「現実の問題」から取り上げるデータによって，定式化される「数学の問題」は様々である。また,「Ｂ．数学の問題」が同じであっても異なる結論が得られるという点は,「Ｄ．社会的価値判断」のうち「D-2　多様性・多面性・協調性」にもとづく判断ができるという点にもつながる。

「学級全体」の段階では，各グループの提案について検討を行っており,「他者との相互作用」を通じて,「A-4　解釈・評価」の確認，見直しが行われている。ここでも,「個別解決」の段階と似て,「病院前にはお店があるから」という，数学によらない理由を加味している場合と,「計算が簡単で分かりやすいから」という理由で短絡的な数学的判断に終止している場合がある。「現実世界の問題」に対する判断を行う上で，前者のように「Ｄ．社会的価値判断」が根拠となる場合と，後者のように「Ｂ．数学の内容」が根拠となる場合がある。短絡的な数学的判断で得られた結論に終止してしまうのでは,「A-1　定式化」の「水準 1」を脱し切れていない可能性がある。数学的判断で前提となっている定式化では,「現実世界の問題」へのフィードバックを繰り返しながら，多様な視点を模索しながら,「数学の問題」へと翻訳していくことが求められる。また,「数学の問題」へと定式化が前提となっている数学的判断であっても，児童の判断の実際の場合，数学によらない判断を結論として見出す児童の回答があった点は見逃すことができない。

（5）交通事故を減らそう

「導入」及び「学級全体（15～25 分)」の段階では，Bowland Maths.のケーススタディの 1 つ「交通事故を減らそう」をもとに，既にデータが準備されている「交通事故を減らそう」という「現実世界の問題」を設定した。事故地点と関連情報（図 1）は，ソフトの機能により，グラフ表示（図 2）が可能となっている。このように,「現実世界の問題」の関連情報が，ソフトの機能により，即時的に「数学の問題」として定式化されている点が特徴的である。

「ペア学習（25～50 分)」及び「学級全体（50～60 分)」の段階では，ソフトの利用を前提として仮説を立てるため,交通事故に影響する変数を取り出すといった,「数学の問題」

から「現実の問題」へのフィードバックに相当する「A-1　定式化」がの行われている。さらに言えば，幾度となく，「現実の問題」から「数学の問題」への定式化が何度も繰り返し行われたことになる。そして，根拠を明確にして示すことを意識して議論しており，「A-4　解釈・評価」の水準向上が期待されていた。このとき，「他者との相互作用」に関連する学習形態を工夫することにより，「A-1　定式化」及び「A-4　解釈・評価」について，自己内「水準 2」及び自己内「水準 3」への向上を目指している。

「ペア学習」及び「学級全体（80～90 分）」の段階では，前時の活動を深めて，様々な安全対策が出されている。ソフトを利用して，データを層別化し複数の事柄を関連させており，「A-1　定式化」の自己内「水準 3」を志向している。これらの対策は「現実世界の問題」に対する判断となる。ここでは，「A-4　解釈・評価」について確認，見直しが行われており，「他者との相互作用」を通じて，自己内「水準 2」及び自己内「水準 3」に相当する。

「小グループでの活動」及び「学級全体（150～180 分）」の段階では，「他者との相互作用」を通じた，「A-4　解釈・評価」が行われ，「現実世界の問題」に対する判断が行われており，自己内「水準 3」までの向上が期待できる。このとき，2 つのペアを合わせて 4 人からなるグループに再編成している。あらためて「他者との相互作用」により，「A-1　定式化」及び「A-4　解釈・評価」の各水準について向上を図っている点に工夫がみられる。授業者の評価として，「振り返りでは，ほとんどの生徒が，自分，ペア，グループの活動を具体的に振り返りながら記述することができていた。」とあるように，自己内「水準 3」への向上の手立てとして，「他者との相互作用」が重要であることが示唆された。

「学級全体（180 分～200 分）」の段階では，また，各グループの提案について自己評価を行っており，「他者との相互作用」を通じて，「A-4　解釈・評価」について確認，見直しが行われている。このとき，3 つの観点「良かった点」「良くなかった点」「改善点」を設けて，振り返りを行った。「良くなかった点の改善点として，自分たちが設定した標識やパトロールで本当に事故を防ぐことができるのかがわからない」ということを記述している生徒がいたように，「現実世界の問題」に対する判断結果の効果について確信を持つことができていない。これは，「D．社会的価値判断」のうち「D-5　効率性・有限性」が働いているとみることができる。このような意見を取り上げながら，「現実世界の問題」に対する判断に焦点をあてた授業展開にも期待したい。

（6）水の配分

「導入」の段階では，『Bowland Maths.』の教材の 1 つ「利用可能な水の量」をもとに，FAO（国際連合食糧農業機関）の aquastat という情報システムで公開されている実データを付加して，「水の分配」という「現実世界の問題」を設定した。実データとして取り上げたのは，「農業における経済活動人口」「農地面積のデータ」であり，授業者が「人間の基本的な生活のために必要な水よりもはるかに多くの水を農業で必要とするという状況を踏まえることにより，つくり出される指標に多様性が出てくることを期待した」と述べているように，「C．選択支援」のうち「C-2　指標・指数」の創出をねらいとしている点に工夫がみられる。ここでは，「現実世界の問題」と「選択肢」の間のフィードバックに重点が置かれていると言える。

「学級全体（20～30 分）」の段階では，人口だけを比較した例を取り上げており，その比較方法がよくない点を共有している。そして，複数の視点を考慮しながら，比較検討のための指標づくりをねらいとしている。つまり，「A-1　定式化」及び「A-4　解釈・評価」について自己内「水準 3」への向上を意図した取組となっている。

「個別解決」の段階では，「農業人口は 2 倍の水を使用すると仮定」や「農業のことも利用可能な水に含まれているから考えなくてもよい」といった考えがみられ，これらは「A-1　定式化」及び「A-4　解釈・評価」について自己内「水準 2」に相当する。

「小グループでの話し合い（50～80 分）」の段階では，生徒各自の考えにもとづき，グループで指標づくりを行っている。このとき，生徒各自の指標を理解し，より良い指標づくりに向けた取り組みが展開されている。ここでは，「A-1　定式化」及び「A-4　解釈・評価」について「他者との相互作用」を強調している。その際，日頃の数学授業を踏まえた授業者の判断により，自己内「水準 2」と自己内「水準 3」に相当するであろう生徒を意図的に 1 つのグループとなるようにしている点に工夫がみられる。

「学級全体（80～90 分）」及び「小グループでの話し合い（90～100 分）」の段階では，本実践のねらいとなっている「農業で使う水」の配分が話題となっている。「現実世界の問題」に対する定式化を行い，そして，「選択肢」として指標を創出するにあたり，「農業で使う水」の取扱いについて二分されている。例えば，「農業で使う水」を特別視しないとした 5 班の生徒のうち「農業で使う水の量が定かではなく仮定してみるとするとその値がもし違ったものだったら，答えが変わってきてしまう。それなら，仮定などせずに与えられた情報のみで考えよう。」という生徒の記録にあるように，客観的データにもとづく数学的判断が必要な場合もある。ここでは，「D．社会的価値判断」のうち「D-1　公平性・公正性・平等性」が影響している記述がみられる。

「小グループでの活動」の段階では，「他者との相互作用」を通じて，「A-1　定式化」及び「A-4　解釈・評価」について自己内「水準 3」に相当する活動が展開されており，本実践のねらいとする複数の視点から指標づくりを行っているグループがみられた。

「学級全体（150 分～180 分）」及び「学級全体（180～200 分）」の段階では，ポスターセッションを行い，他のグループのポスター発表を聞き，グループの提案について評価している。ここでは，「他者との相互作用」を通じて，「現実世界の問題」に対する判断としての指標について注目している。

（７）バスケットボールの選手を選ぼう

「導入」の段階では，監督の立場から，バスケットボール部の大会出場選手を選ぶという，「現実世界の問題」を設定している。ここでは，選手 5 名のうち 3 名は既に選んであり，残りの選手 2 名を選ぶことになる。提示されているデータは，「身長」「得点」「監督による評価」の 3 点に限定してあり，既に選ばれている選手には評価「C」はない。このような問題設定に工夫がみられる。

「個別解決」では，主な考えの 1 つとして，例 2（SM 児の考え）がある。例 2 では，評価「A」を 3 点，評価「B」を 2 点，評価「C」を 1 点として，$\boxed{1}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ それぞれ選手の平均点を算出している。ここでは，「現実世界の問題」を「数学の問題」に定式化し，「B．数学の内容」については「B-1　代数的」手法を用いて，「現実世界の問題」に

対する判断が行われている。この場合，選手$\boxed{7}$（15 点）以外の選手 4 名は，同じ 13 点となり，数学的判断ができない。そこで，評価「A」の個数と「部活動の出席率」の評価を判断材料として，選手$\boxed{4}$を選んでいる。ここでは，授業者も指摘しているように，「A-1　定式化」について自己内「水準 1」に相当する。このとき，「社会的価値判断」については，部活動という性格もあり，部活への出席を 1 つの目安とする「D-1　公平性・公正性・平等性」及び「D-3　責任性・自律性」が影響している記述がみられる。

「小グループでの話し合い（20～45 分）」及び「学級全体（45～50 分）」の段階では，授業の考察の中でも取り上げられている，例 3 の SW 児のグループでは，選手$\boxed{5}$の取捨選択が話題となっている。意見が異なる背景にはチーム編成の方針が関わっていることから，次の試合までの練習期間をグループ内で設定している。「他者との相互作用」により，「大会が 2 週間後だったら... $\boxed{5}$は出席数が少ないけど，2 週間後だったらおいぬかれる可能性がないから。」と最終的な結論としている。「A-1　定式化」について，指導者が指摘しているように，自己内「水準 1」から自己内「水準 2」への向上とみることができる。

「学級全体（50～60 分）」及び「小グループでの話し合い（60～80 分）」の段階では，グループ内で 1 つの方針に絞りこむことになる。このとき，監督の立場からだけではなく，選手を選んだ理由について選手の保護者に説明するという設定を付加した点に工夫がみられる。これにより，「説得力のある説明」や「客観的な説明」が必要であるとして，数値化するアイデアが共有される。例 5 の MR 児のグループでは，MR 児の主張する「部活動というのは生徒会活動の一環なので，当然部活にしっかりと参加している選手を選ぶ。」という主張があり，AT 児は 3 段階評価を点数化して指標づくりを行い，MR 児の主張が通るように重み付けを行っている点に特徴がある。ここでは，「D. 社会的価値観」について「D-1　公平性・公正性・平等性」及び「D-3　責任性・自律性」が影響を及ぼしている。このような「他者との相互作用」を通じて，「A-1　定式化」について自己内「水準 3」の活動とみることができる。そこでは，数学の問題への定式化にあたり，「B-1　代数的」手法により，点数化及び数値の重み付けといった「C-2　指標・指数」を創出している。また，「A-4　解釈・評価」について自己内「水準 3」への高まりとみることができる。

「小グループ間の交流（80～90 分）」及び「学級全体（90～100 分）」の段階では，他のグループのところへ出向き，議論を行っている。ここでは，「他者との相互作用」を通じて，最終的な「現実世界の問題」の判断を行うことになる。

（8）修学旅行のルートを決定しよう

「導入」の段階では，実際に使用した「スケジュールマップ」と「京都移動時間早見表」を使用しながら，「現実世界の問題」を定式化する。対象の生徒は，既に京都へ修学旅行に行った経験があり，その経験を活かして問題に取り組むことが期待できる。

「個別解決」の段階では，指定されている世界文化遺産 7 カ所すべてをまわることができるのか否かという「現実世界の問題」について，見学ルート及び移動にかかる時間を「線」で表すなどして，「数学の問題」へと定式化する。「数学の問題」として取り組むにあたり，「移動時間は渋滞がなく，示された時間で移動できる」点や「駐車場に到着して見学して，タクシーで出発するまでの時間を 30 分とする」などの理想化が行われている。このとき，「スケジュールマップ」上に世界文化遺産はすべて「点」で表されている点に工夫がみら

れる。結果として，7 カ所すべてをまわることはできない。例えば，例 2（不可能である根拠）では，樹形図を用いて移動回数を求め，その上で移動時間の計算をしている。ここでは，「B．数学の内容」として「B-1　代数的」アプローチや「B-2　図形的」アプローチを行っており，「A-4　解釈・評価」について自己内「水準 1」に相当する。

「グループでの話し合い」の段階では，世界文化遺産 7 カ所すべてをまわることができないことが教室内で共有されたため，次に，世界文化遺産 6 カ所をまわる新たなルートをつくる課題が提示される。この課題は，当初の「現実世界の問題」に対する判断結果からフィードバックして得られた「現実世界の問題」であり，「D．社会的価値観」の創出もねらいとなっている。例えば，「来年の後輩のために」という表現は，「D-3　責任性・自律性」を促し，「帰りの新幹線のこともあるので，なるべく早く京都駅に到着するように」といった表現は「D-5　効率性・有限性」を促すことが期待できる。活動では，例 3（生徒のグループ活動の様子）から，はずした見学場所が共通の者同士のグループである例 4（新しいグループ活動の様子）へとグループ編成に工夫がみられる。例えば，天龍寺を見学ルートからはずしたグループについて，「D．社会的価値観」の創出がみられる。課題 2 には，上述の「D-5　効率性・有限性」に関わる記述があり，可能な限り，早く京都駅に戻ることを要求している。図 11（生徒 M・Y）にあるように，合計 110 分になるルートが題意を満たすことになり，図 10（生徒 M・Y）の「スケジュールマップ」にはそのルートが示されているが，最終的な結果には合計 120 分のルートを採用している。これは，指導者も指摘しているように，「F 銀閣寺→C 金閣寺→E 上賀茂神社」という「銀閣寺→金閣寺の順に見学することの社会的価値観を優先して」おり，「D-6　快楽性・愉悦性」がみられる。一方，東寺を見学ルートからはずした生徒 1 名がいる。この生徒については，図 12（生徒 D.O）の「スケジュールマップ」及び図 13（生徒 D.O.）のワークシートから，「D．社会的価値観」の表出がみられる。当初の「現実世界の問題」である，世界文化遺産 7 カ所すべてをまわるルートを検討しており，条件である見学時間 30 分間の変更等を行っている。そして，はずした 1 カ所の東寺は京都駅から一番近いことを考慮し，「もし，予定よりも速く進んだ場合，時間があれば，東寺にも行けるから。」と記述している。指導者が指摘しているように，「D-3　責任性・自律性」及び「D-6　快楽性・愉悦性」が影響している。

「学級全体での発表」では，各グループが発表を行った。「他者との相互作用」に関わる授業感想例がみられる。例えば，図 14（授業感想例 1）では，「皆と協力して答えをみちびき出すことがあんなにも大切なものだとは思いませんでした。」とある。

（9）どちらのドラッグストアが得かな

「数学的な問題場面をつくる」段階では，「現実世界の問題」を定式化し，6.10.1 の図 3 の「薬アイジョー」のカードの使用条件があることを確認しておく必要がある。例 2（10,000 円と 6,000 円の場合で比較）では，具体的な購入金額で 2 店の比較を行っている。ここでは，「A-1　定式化」について自己内「水準 2」の活動とみることができる。それは，自分なりの視点を設定し，その視点にもとづく数学的解決を行っているからである。

「数学的な問題場面に取り組む」段階では，2 店の割引カードの優位性の関係を探るため，生徒は様々な「B．数学の内容」によるアプローチを行っている。例えば，図 13（生徒（A・I））では，「B-3　関数的」方法としてグラフを用いて比較している。2 直線の交

点から，購入額と値引き金額の関係を求めている。交点が（1000，750）のとき，2 店の優位性がなく等しい場合となる。ここで,「現実世界の問題」の条件を振り返り,「薬アイジョー」のカードの使用条件は 2000 円以上購入することである点を踏まえ,「アイジョーは 1000 円買っても割引の対象にならないが　ヤスモトは 1000 円買っても割引の対象になる（850 円で買える）ので　ずっとヤスモトの方が得」と記述している。

「課題 2 を設定して，数学的な問題場面に取り組む」及び「発表を行う」の段階では，これまでの課題 1 の結果から，劣位である「薬アイジョー」の割引カードの条件変更に関する「現実世界の問題」に取り組む。このとき，グループ毎にさいたま市内の区名を割り当て，区内の「薬アイジョー」支店長として，割引カードを作り替えることにする。課題 1 の消費者の立場とは異なり，課題 2 では割引カードの作成者の立場から問題に取り組む点に工夫がみられる。また，生徒たちは，1 次関数のグラフを用いて，2 店の割引カードの優位性の関係を探求する。このとき，授業者が指摘しているように「数学的内容の B-3 関数的を用いることにより，選択支援の C-1　シミュレーションにつなげるようにした。」としている点に工夫がみられる。図 14（生徒（A・I））では，複数の直線のグラフによる定式化が行われている。ここでは,「A-1　定式化」について自己内「水準 3」に相当する。さらに,「来年が 2013 年ということで，20.13%引きにした。」という記述もみられる。これは,「D．社会的価値観」について「D-6　快楽性・愉悦性」が創出している。図 15（生徒（Y・M））では,「20%OFF でもできることにはできるが，店のもうけを考えると，15%の方が良いのではないかと思う。（20%OFF するということは，商品を買えば買うだけ割り引きする額も増えるから。）」という記述があるように，課題 2 では区内の支店長として割引カードの作成者の立場から「現実世界の問題」に対する判断を行うため,「D．社会的価値観」について「D-3　責任性・自律性」が表出している。図 25（授業感想例 5）では,「･･･グラフで表わすと，どっちがどれだけ割引きされているのが一目で分かった。」という記述があるように，グラフを活用することで「現実世界の問題」に対する判断を行っている。図 26（授業感想例 6）では,「最後の話し合いがはくねつしました。『20%！！』「15%だー！！」勝者 15%でした！！うれしいです！！」という記述がある。これは,「他者との相互作用」により,「A-4　解釈・評価」について自己内「水準 2」に相当する。それは，他の班のアプローチを対比した上で,自身の判断結果の妥当性を評価しているからである。

第７章　研究のまとめと今後の課題

本研究の目的は，「数学的判断力」を「数学的判断プロセスをたどりながら，数学的論拠に基づいて，事象を分析，解釈し，意志決定する能力」と規定した上で，数学的判断力の概念の明確化やその枠組みの具体化をし，その育成を意図する教材及び授業を開発しその有効性を検討するとともに，子どもの数学的判断力の評価やその育成を図るための教師教育のあり方についての示唆を得ることであった。

第６章に示した授業を振りかえると，それぞれの授業開発における研究会での議論がよみがえってくる。このような授業に至るまでには多くの時間を要した。それは，私たちが示した「数学的判断プロセス」は,「数学的モデル化」を基盤に置きながらも，社会的な文脈に対して個々の価値観を付与しながら意思決定をするという点で考察の範囲をさらに拡げることにあったからである。私たちは，教材開発を進める過程で「文脈依存型」という表現をするようになった。算数・数学指導でこれまで「ノイズ」とされてきたものをあえて排除しないことで，その文脈に，子どもなりの価値観を付与し判断させることができるのではないかと考えたのである。しかしながら，授業化においては，子どもがその「ノイズ」をどのように捉えるのか，子どもの反応によっては授業が 10 分で終ってしまうのではないか，あるいは，何時間かけても子どもが納得できるような判断に至らないのではないかという不安が，授業者はもちろんのこと，すべての研究メンバーにあった。このような経緯で実践した授業における児童・生徒の反応は私たちの予想以上に活発であり，このような授業の可能性が大いに示唆されたと捉えている。また，いくつかの授業後に記述させた学習感想や振り返りには，解決への着眼点が多様であること，それを知る上で他者との交流が重要であること，そして，それによってより根拠ある説得力のある判断がなされること，また，これまでに学習した算数・数学の内容の使用法への言及が多く見られた。これらのことは，本研究の理論とそれを具体化した授業の有効性と可能性の一端を示していると考える。

本研究の目的に対する主な成果は，次の通りである。

第一に，数学的判断のプロセスを明確化し,「数学的判断力に関する枠組み」を示したことである。この枠組みは，数学的判断力の育成を目的とする授業づくりのための「規範的枠組み」であるとともに，授業における子どもたちの数学的判断力の分析や，本研究で開発・実施した数学的判断力に関する実態調査の分析の基盤になるという点において,「記述的枠組み」といえるものでもあった。

第二に，その「数学的判断力に関する枠組み」の重要な柱である「プロセス能力」について,「定式化」「数学的表現」「数学的推論・分析」「解釈・評価」「数学的コミュニケーション」「数学的・社会的価値認識」を縦軸とし,「自己限定的」,「多様性の萌芽」,「社会的」の３つの水準を横軸とする「水準表」を提案したことである。さらに，水準の上昇に寄与する主要な要因として,「他者との相互作用」という視座も導入した。

第三に，現実世界の問題を解決するプロセスで必要となる数学的諸能力の育成を掲げる

イギリスの数学教育改良プロジェクト Bowland Maths.の「ケーススタディ」と呼ばれる教材，それを指導するための教師教育に当たる「教師教育モジュール」，子どもの評価のための「評価課題」を，数学的判断力の視座から考察し，数学的判断のプロセスを実現する教材開発や授業を考える上での示唆を得た。具体的には，「ケーススタディ」は，オープンエンドで，解決で必要とされる数学が明らかでない状況において，プロセス能力と複数領域に渡る様々な数学を用いて解決を進めることが意図されており，本研究で開発すべき教材に対する示唆を得た。また，解決過程では，ペアやグループで解決すること，その結果を伝え，相互に評価したり，自分たちの解決過程を振り返ったりすることが意図されており，授業における「他者との相互作用」の実現方法に関する示唆が得られた。さらに，「教師教育モジュール」は，「ケーススタディ」を指導する上でキーとなるポイントを集約して構成されたものであり，数学的判断力を育成する授業実践を普及するためには教師教育が必要なことと，その内容として，「定式化されていない問題を授業で扱うこと」や「授業での協働作業の進め方」などが考えられることが示唆された。「評価課題」は，個々の課題で，プロセス能力を横軸，それらの水準を縦軸に配置したルーブリックを用いて測ろうとしており，数学的判断プロセスにおける「プロセス能力」の評価の方法についての示唆が得られた。

第四の成果は，数学的判断プロセスにもとづいて，数学的判断力をみる調査問題を開発し，実態調査を行い，児童生徒の数学的判断力に関する実態の一端を明らかにしたことである。具体的には，「基準を設けて適切に数値化する児童生徒が少ない」，「自ら仮定を設定して問題解決する児童生徒が少ない」，「複数の項目に着目して判断する児童生徒が少ない」の 3 点を主たる実態として明らかにした。

第五の成果は，上述の第二や第四の成果を念頭に，「子どもたちの様々な価値観が表出される」「子どもが，互いに考えを伝え合ったり，吟味したりしながら判断する必要性を感じる」「多様なアプローチが可能で，オープンエンドである」という条件を設け，児童・生徒の数学的判断力の育成を意図する 35 の教材を開発したことである。それらの教材は，子どもが数学的判断プロセスを実現し得るような文脈を設定することを優先した「文脈依存型」の問題設定，すなわち，必ずしも現実そのものの事象やデータではなく，フィクションを含むことも明確化した。

そして，第 6 章では，小学校で 4 つ，中学校で 5 つ，高等学校で 1 つの実験授業における，それぞれの文脈に対して社会的価値観を付与しながら判断をする子どもの様相をもとに，「数学的判断力の枠組み」やプロセス能力の「水準表」の有効性について実証的に考察した。

いずれの実験授業においても，子どもは，文脈に対して社会的価値観を付与し，また，ほとんどの授業で，実態調査により児童・生徒の課題として特定した「基準を設けて数値化する」，「自ら仮定を設定する」，「複数の項目に着目して判断する」といったことを行いながら，判断することができていた。各実験授業における数学的判断プロセスを整理した 6.1 の表 6-1 は，本研究の「数学的判断力の枠組み」及び開発した教材の有効性を示唆するものになっていると考える。また，例えば，「自動販売機の設置場所を考えよう」（6.5）や「水の分配」（6.7）では，指標として多様な割合を考えることで，その理解を深めることができていたように，数学的判断プロセスを行うことで，算数・数学の内容の理解が深

まることも確認された。

特に，数学的判断力の育成を意図する授業の実践に関して，得られた示唆及び明確化された課題は，以下の通りである。

第一は，子どもを，他者を納得させることが要請される立場に立たせることについてである。「伝統技術展への行き方を考えよう」（6.2），「的当て」（6.3），「修学旅行のルートを決定しよう」（6.9），「ポカリウスを分配しよう」（6.11）のように，自分たちの経験に基づいて仲間や下級生のために考える授業から，「自動販売機の設置場所を考えよう」（6.5），「交通事故を減らそう」（6.6），「水の分配」（6.7），「バスケットボールの選手を選ぼう」（6.8），「どちらのドラッグストアが得かな」（6.10）のように大人の立場に立って考える授業まであった。また，「伝統技術展への行き方を考えよう」では下の学年の担任先生，「交通事故を減らそう」は町議会，「水の分配」は国際支援機関，「バスケットボールの選手を選ぼう」は保護者というように伝える相手を指定し，根拠を明確にして説明する必要性を強調したり，「どちらのドラッグストアが得かな」で，はじめは「消費者の立場」，その後に「経営者の立場」で，というように途中で立場を変更したりした。子どもたちが，それぞれの事例において，社会的価値観を付与し判断しようとしたことは，このような工夫の有効性を示していると考える。

第二は，「他者との相互作用」を生起させるための工夫についてである。多くの実験授業で，ペア，小グループ，全体討議といった多様な形態を使い分けた。また，ポスターセッションやグループ間交流を取り入れた授業もあった。そのことにより異なる価値観や考えの交流が実現しており，「他者との相互作用」を生起するという点において極めて有効だったと考える。一方，プロセス能力の水準の上昇に効果的に寄与する，質の高い「他者との相互作用」に高めるという点では検討の余地が残されている。例えば，グループの編成に関しては，「走り幅跳びの代表選手を選ぼう」（6.4）や「修学旅行のルートを決定しよう」（6.9）のように，同じ意見や価値観を表出した子どもを集めた授業と，「水の分配」（6.7）のように授業者の判断に基づいてあらかじめプロセス能力の水準が異なる生徒が混在するようにした授業があったが，どのような場合に，どのような編成にすることが質の高い相互作用につながるかは検討できなかった。

また，小学校 4 年生に対して行った「伝統技術展への行き方を考えよう」（6.2）では，よりよい提案書にするためのアドバイスをし合うという活動をしたが，児童が友だちの考えを否定し，自分の考えのよさを述べ合うにとどまった児童が少なからずいたことも報告されている。他者の判断結果と自身の判断結果を対比して評価することに対して手立てを考えることも課題として残っている。

さらに，多くの実験授業では，自分たちの判断結果を発表し交流したり，相互評価したりすることは行ったが，よりよい判断やプロセス能力を高めるための「練り上げ」は実現できなかった。Bowland Maths.のケーススタディではそのような「練り上げ」は想定されていないが，「他者との相互作用」によりプロセス能力の水準を高めることを意図するときに，それは必要だという結論に達した。したがって，ペアやグループで判断した後での，学級全体での相互作用をいかに実現するかは，今後の大きな課題である。なお，「的当て」（6.3）で，前時に 10 分ほどを使って問題に取り組ませ，ワークシートを回収し，子ども

の考えを整理，分析し，次時の比較検討の計画を立てていたことは，そのような「練り上げ」のための手立てとしての可能性を示唆していると考える。

最後に，数学的判断力を育成する授業を実践するための教師教育についての示唆を述べる。私たちの授業づくりの過程での議論や実験授業の研究協議を通して，次のような点に関して，教師の理解を図る必要があることがわかった。

第一は，子どもが指定された数学の内容を用いることと，社会的価値観を付与し，自ら必要な数学を選択し用いることには質的な違いがあることに関する理解である。これは，解決に用いる数学の内容が育成しようとするプロセスに比べて易しすぎるのではないかという指摘を受けたことに基づく。

第二は，子どもたちが，多様な考え方や方法があることを受け入れ，その価値を認識し得ることに関する理解である。これは，生徒が「結局，どの考えが正しかったのか」と，言わば消化不良状態となるのでなないかといった声が聞かれたことに基づく。

これらについての理解に加えて，ペアやグループによる協調的な問題解決をいかに支援するかといった指導法，並びに，プロセス能力の評価方法についても学ぶ必要があると考える。

これらの教師教育は，Bowland Maths.の教師教育モジュールのように，「準備」「実践」「フォローアップ」という一連のセッションからなる，授業実践を伴うワークショップを行うことが効果的だと考える。そのようなワークショップの設計と実践には，早急に取り組みたいと考えている。

数学的判断力の育成は，算数・数学の授業だけではなく，総合的な学習の時間も視野に入れた提案として位置づけることもできると考えている。これは，言うまでもなく，算数・数学指導に対して消極的な姿勢に立っているのではなく，私たちが主張する「数学的判断プロセス」は，これからを生きる子どもたちにとって極めて重要かつ不可欠な力であり，伝統的な教科の枠にとらわれるべきではないと考えているからである。今後，理科や技術科，情報科等との教科横断的な視点やキャリア教育や消費者教育的視点も持つとともに，「確率」のような中・高等学校で学ぶ数学を用いる判断も射程に入れ，本研究を発展させていきたいと考えている。

付録　Bowland Maths.のケーススタディのレビュー

Bowland Maths.のDVDに収められている，18のケーススタディについて，以下の点をまとめた。

- 教材の概要：何について，どのように解決や判断をさせようとしているか（テーマと想定されている解決過程）
- 数学的判断力：解決過程で必要とされる主要な力は何か
- 数学的内容： 解決過程で必要とされる主要な数学の内容は何か
- ICTの利用：動画やソフトの有無やその概要，使用目的など
- コメント：ユニークな点，問題点などを

掲載順と本付録におけるページは，以下の通りである。

執筆分担

第1章　西村圭一

第2章　山口武志・西村圭一

第3章　西村圭一
松田菜穂子（3.2）
青山和裕（3.3）

第4章　清水宏幸・清野辰彦・長尾篤志

第5章　西村圭一

第6章　久保良宏（6.1）
柴田奈緒子（6.2）
島田功（6.3）
室谷将勝（6.4，6.5）
本田千春（6.6，6.7）
櫻井順矢（6.8）
浜田兼造(6.9，6.10)
小澤真尚（6.11）
長尾篤志（6.11）
松寄昭雄（6.12）

第7章　西村圭一・久保良宏

平成 22 年度～平成 24 年度　科学研究費補助金基盤研究(B)　研究報告書

社会的文脈における
数学的判断力の育成に関する総合的研究

発　行　日　平成 25 年 3 月 25 日
発　行　者　研究代表者　西村　圭一
所　在　地　〒184-8501　東京都小金井市貫井北町 4-1-1
　　　　　　東京学芸大学数学講座数学科教育学分野内